Sistemas Discretos Lineales

Introducción

Cesáreo Raimúndez

Depto. de Ingeniería de Sistemas y Automática

ETSII-Vigo

TEMA 9 - Sistemas Discretos

- Introducción.
- Muestreo y reconstrucción.
- Teorema de muestreo.
- Aliasing y filtrado.
- La transformada $\mathcal{Z}$.

Motivación

Los sistemas tratados hasta el momento lo fueron dentro de una formulación continua que históricamente está respaldada por su implementación.

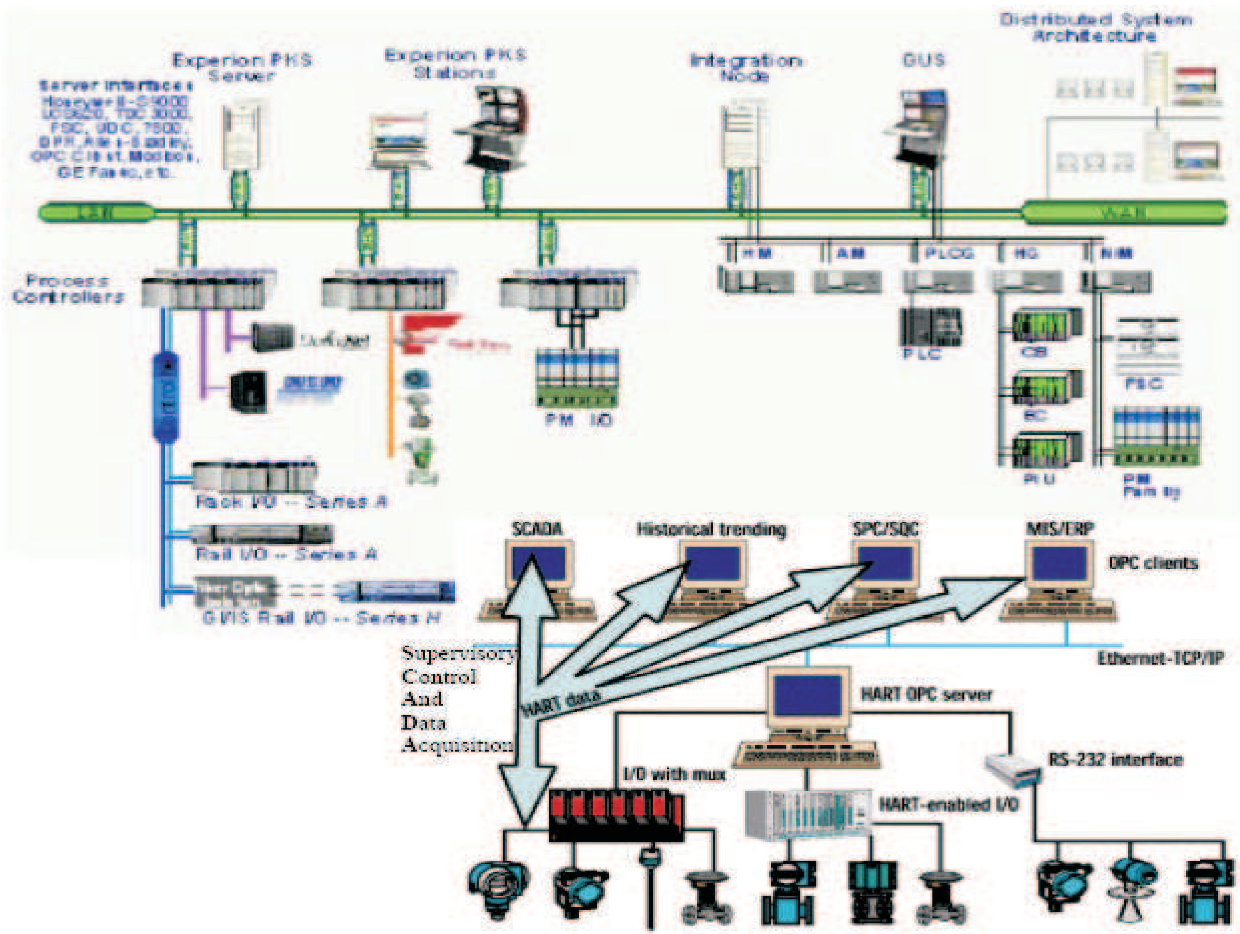
Las leyes de control eran realizadas a través de sub-sistemas de electrónica analógica, (amplificadores operacionales) hidráulicos, (suspensión hidro-neumática) o electro-mecánicos (motores CC, frenos magnéticos) que poseen evolución continua.

Con caída de precios de la electrónica digital y de los procesadores, las leyes de control se pueden realizar a través de programas almacenados en micro controladores que se comunican con el mundo exterior a través de códigos digitales (numéricos).

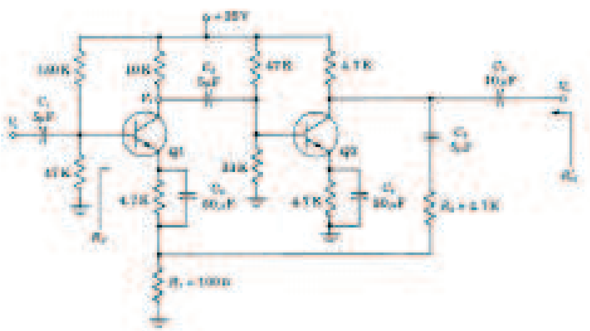
El control moderno se efectúa utilizando actuadores electro-mecánicos, hidráulicos, térmicos, etc. cuya evolución se describe a través de leyes en tiempo continuo, actuando sobre plantas que también evolucionan de modo continuo, pero cuyas leyes de control se realizan a través de ordenadores, micro-controladores, etc., que procesan datos en forma digital codificada (modo discreto).

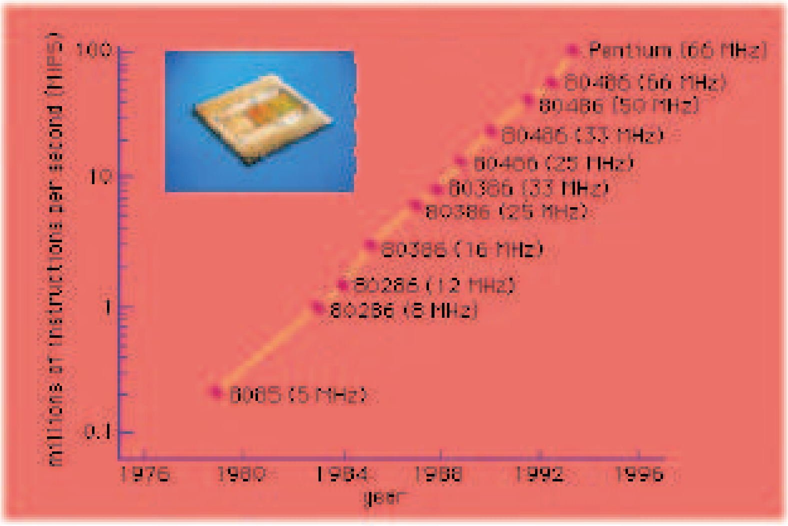
En este contexto se hacen necesarios elementos de interfase entre modos: continuo-discreto y discreto-continuo.

Esquema Típico de Control Moderno

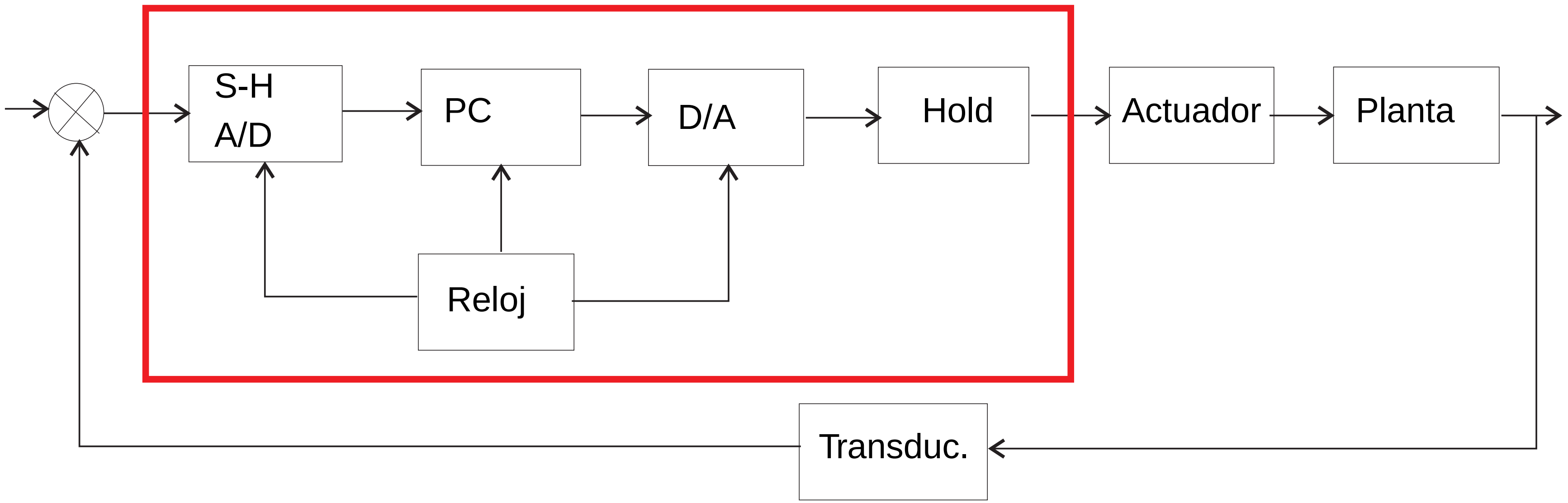


Tecnologías Comparadas





Elementos Esenciales en el Control Moderno



A/D	convertidor Analógico-Digital	D/A	convertidor Digital-Analógico
Hold	Mantenedor	S-H	Muestreo y Mantenedor
Actuador	Aplica energía a la Planta	PC	Procesador (Ordenador)
Transduc.	Transductor (Observador)	Reloj	Cadencia de muestreo

Operadores Básicos en el Muestreo

RELOJ Elemento esencial que impone la cadencia de muestreo y sincroniza los tiempos de entrada y salida en el procesador. De modo general esta cadencia es fija y se conoce como período de muestreo (T).

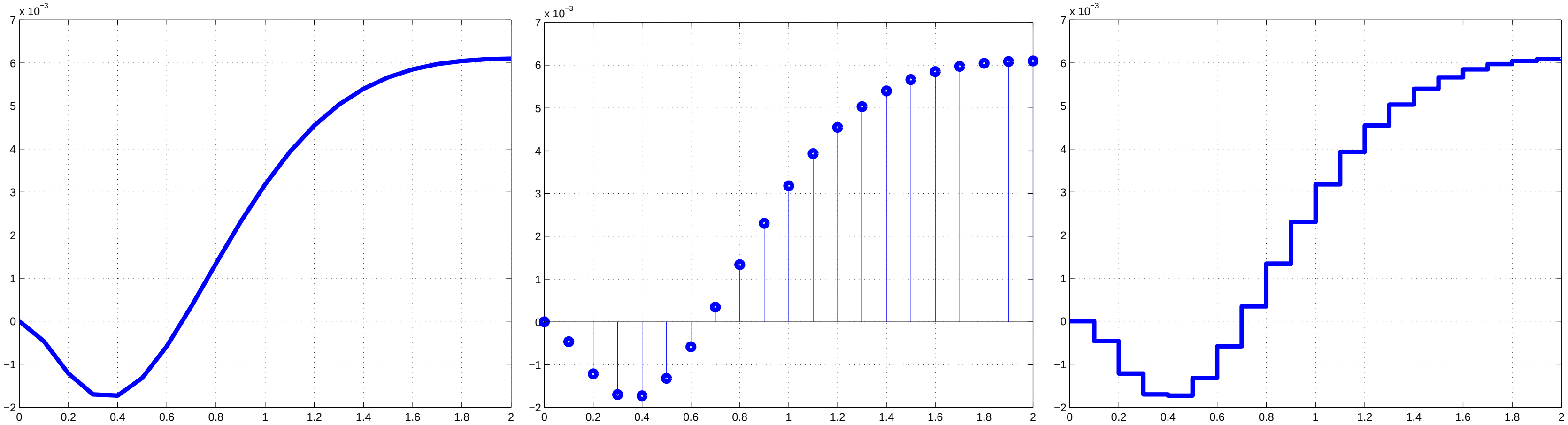
MUESTREO Colecta el valor instantáneo de la variable analógica que está siendo muestreada. La operación de muestreo conlleva a una pérdida de información sobre la señal muestreada.

MANTENEDOR Mantiene el valor (constante) durante un periodo de muestreo.

A/D Convierte una señal analógica (tensión) en un valor digital base 2.

D/A Convierte un valor digital base 2 en una grandeza analógica (tensión).

Señales Comparadas



Las figuras arriba ilustran el proceso de muestreo con periodo de $T = 0.1[s]$ (segunda figura de izquierda a derecha) y la reconstrucción a través del mantenedor (tercera figura de izquierda a derecha).

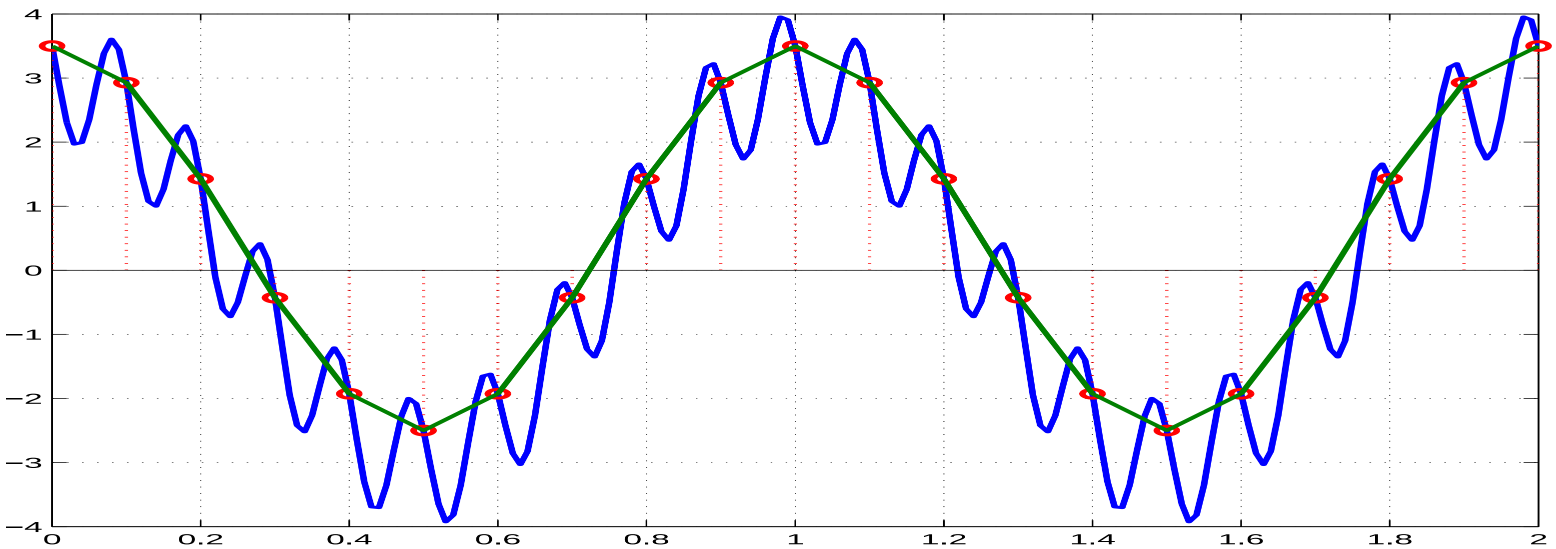
Pérdida de Información

En el muestreo de señales puede ocurrir pérdida de información como puede observarse en el ejemplo que sigue:

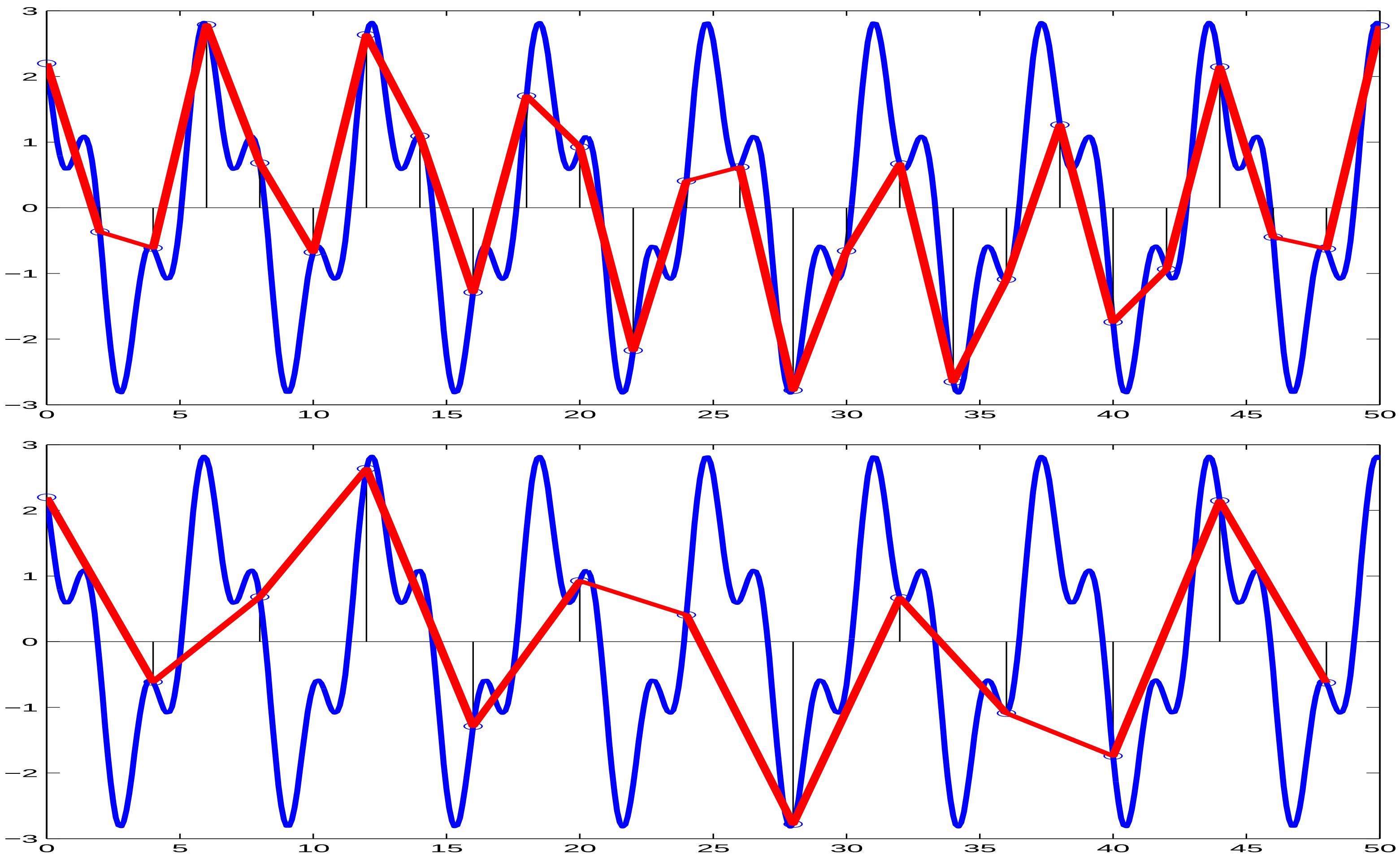
$$f(t) = 3\cos(2\pi t) + \cos(20\pi t + \frac{\pi}{3})$$

efectuando muestreo con periodo $T = 0.1$ queda:

$$f(kT) = 3\cos(0.2k\pi) + \cos(2k\pi + \frac{\pi}{3}) = 3\cos(0.2k\pi) + 0.5$$



Pérdida de Información



Teorema de Reconstrucción (Shannon)

Si las frecuencias que componen la señal $f(t)$ son limitadas por la frecuencia ω_m, para que la reconstrucción de la señal después del muestreo no presente pérdida de información es necesario y suficiente que el muestreo se efectúe con una frecuencia ω_s que obedezca la relación

$$\omega_s \geq 2\,\omega_m$$

En la práctica se utiliza

$$\omega_s \geq 5\,\omega_m$$

Operación de Muestreo

La señal $f(t)$ después de someterse a muestreo con cadencia T indicada por $f(t)^*$ se transforma en

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

donde $\delta(t)$ es la función impulso. Transformando Laplace el conjunto, se obtiene

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT)e^{-skT}$$

llamando $z = e^{sT}$ se puede representar también

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT)z^{-k} = \mathcal{Z}[f(t)]$$

Ejemplos de Transformada $\mathcal{Z}$

La transformación $\mathcal{Z}[f(t)] = F^*(s) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT)z^{-k}$ se llama transformada $\mathcal{Z}$ de la función $f(t)$ con periodo T. Supondremos que $|z| > 1$.

$$\mathcal{Z}[\mathbf{1}(t)] = \sum_{k=0}^{k=\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathcal{Z}[t\mathbf{1}(t)] = T\sum_{k=0}^{k=\infty} kz^{-k} = -Tz\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{k=\infty} z^{-k} = T\frac{z}{(z-1)^2}$$

y para $e^{\alpha T} < |z|$

$$\mathcal{Z}[e^{\alpha t}\mathbf{1}(t)] = \sum_{k=0}^{k=\infty} e^{\alpha T k}z^{-k} = \sum_{k=0}^{k=\infty} (e^{\alpha T})^k z^{-k} = \frac{z}{z-e^{\alpha T}}$$

Propiedades Importantes de $\mathcal{Z}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[y_1 \pm y_2] &= \mathcal{Z}[y_1] \pm \mathcal{Z}[y_2] \\
\mathcal{Z}[\alpha y] &= \alpha \mathcal{Z}[y] \\
\mathcal{Z}[y_{k-n}] &= z^{-n} Y(z) \\
\mathcal{Z}[y_{k+n}] &= z^{n}\left(Y(z) - \sum_{k=0}^{k=n-1} y_k\right) \\
\mathcal{Z}[\alpha^k y_k] &= Y(\alpha^{-1} z) \\
\lim_{k\to 0} y_k &= \lim_{z\to\infty} Y(z) \\
\lim_{k\to\infty} &= \lim_{z\to 1} (1 - z^{-1}) Y(z) (?) \\
Y_1(z) Y_2(z) &= \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{n} y_k y_{n-k}\right] = \mathcal{Z}[y_1 * y_2]
\end{aligned}
$$

$(?)$ si $(1 - z^{-1})Y(z)$ no tiene polos en $|z| \geq 1$

Ecuaciones de Diferencias Lineales

Las ecuaciones de diferencias lineales tienen la estructura

$$y_{k+1} + a_1 y_k + a_0 y_{k-1} = b_1 u_k + b_0 u_{k-1}$$

donde $a_1,\ a_0,\ b_1,\ b_0$ son constantes. Aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ a esta ecuación y teniendo en cuenta que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_{k+p} z^{-k} = z^p \sum_{j=0}^{\infty} y_j z^{-j} = z^p \mathcal{Z}(y)$$

(se utilizó la substitución $j = k + p$ y se supuso que $y_j = 0$ para $j = 0, 1, \cdots, j-1$ representando las condiciones iniciales de la ecuación) obtendremos:

$$(z + a_1 + z^{-1} a_0)\mathcal{Z}(y) = (b_1 + z^{-1} b_0)\mathcal{Z}(u) \quad \text{(cc.ii nulas)}$$

y entonces

$$\frac{\mathcal{Z}(y)}{\mathcal{Z}(u)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$$

Discretización de Operadores Diferenciales

La discretización de operadores diferenciales con período de muestreo T constante, genera ecuaciones de diferencias. La discretización de Euler conlleva a:

$$\frac{dy}{dt}\Big|_{t=kT} \approx \frac{y(kT) - y((k-1)T)}{T} = \frac{y_k - y_{k-1}}{T}$$

Para el sistema mecánico masa muelle rozamiento perturbado con la fuerza u y coordinada x tendremos:

$$\{m\ddot{x} + \nu\dot{x} + Kx = u\} \Longrightarrow \left\{\frac{m}{T^2}(x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}) + \frac{\nu}{T}(x_k - x_{k-1}) + Kx_k = u_{k-1}\right\}$$

Para el controlador PI tendremos:

$$\left\{u(t) = k_p e(t) + k_i \int e(\tau)d\tau\right\} \Longrightarrow \left\{u_{k+1} \approx k_p e_k + k_i T \sum_{j=0}^{j=k} e_j\right\}$$

que también puede ser representado como

$$u_{k+1} = u_k + k_p(e_k - e_{k-1}) + k_i T e_k$$

Resolución de Ecuaciones de Diferencias

Sea el problema de determinar la respuesta a escalón (muestreado) de la función de transferencia

$G(z) = \dfrac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$ con $T = 1,\ a_1 = -1.1,\ a_0 = 0.3,\ b_1 = 1,\ b_0 = 3$.

$$Y[z] = \frac{z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 1.1z^{-1} + 0.3z^{-2}} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z + 3}{z^2 - 1.1z + 0.3} \frac{z}{z - 1}$$

Expandiendo

$$Y[z] = -\frac{90}{z - 0.6} - \frac{70}{z - 0.5} + \frac{20}{z - 1}$$

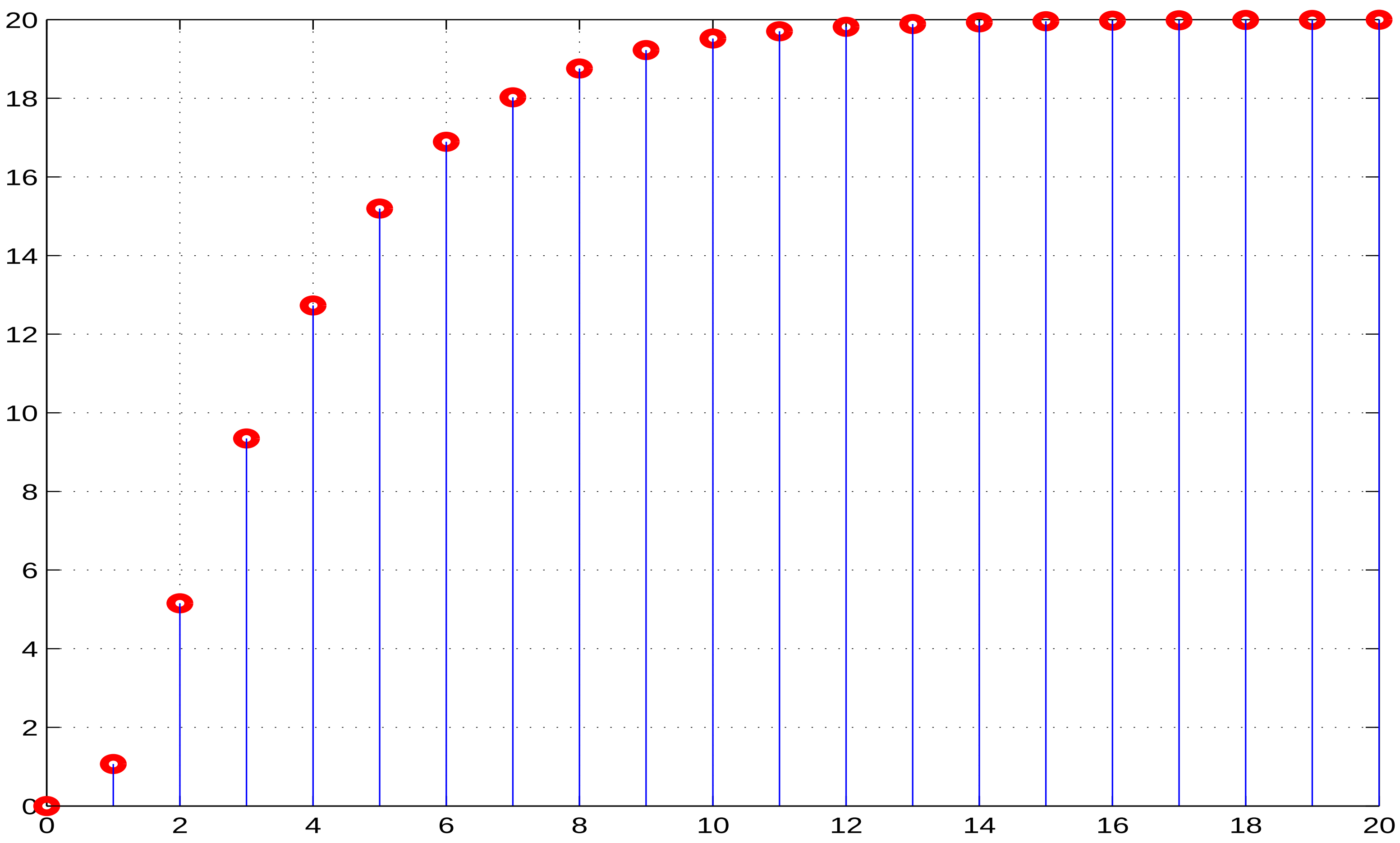
anti-transformando con condiciones iniciales nulas

$$\mathcal{Z}^{-1}[y] = -\mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{90z}{z - 0.6}\right] + \mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{70z}{z - 0.5}\right] + \mathcal{Z}^{-1}\left[z^{-1}\frac{20z}{z - 1}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k \delta(t - k) = -90 \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha_1 k} \delta(t - k + 1) + 70 \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha_2 k} \delta(t - k + 1) + 20 \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k + 1)$$

con $\alpha_1 = -0.51,\ \alpha_2 = -0.69$

Resolución de Ecuaciones de Diferencias



Reconstrucción

Sea la función $\Pi(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-T)$. La señal de $f(t)$ reconstruida a partir del muestreo con periodo T puede ser formulada como

$$\mathcal{H}(f^*(t)) = \bar{f}(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT)\Pi(t-kT)$$

que transformando Laplace

$$\mathcal{L}[\bar{f}(t)] = \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT)\mathcal{L}[\Pi(t)]e^{-skT} = \frac{1-e^{-sT}}{s}\sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT)e^{-skT}$$

arreglando los términos se llega a

$$\mathcal{L}[\bar{f}(t)] = f(0)\mathbf{1}(t) + \sum_{k=1}^{k=\infty}[f(kT) - f((k-1)T)]\mathbf{1}(t-kT)$$

Evaluación de $F^*(s)$

Sea $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \delta(t - kT)$. Se verifica:

$$f^*(t) = \delta_T(t) f(t) \;\therefore\; \mathcal{L}[f^*(t)] = \Delta_T(s) * F(s) = F^*(s)$$

donde

$$\Delta_T(s) = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

Se puede llegar a las expresiones equivalentes

$$\begin{aligned}
F^*(s) &= \sum_{k=0}^{k=\infty} f(kT) e^{-kTs} \\
F^*(s) &= \sum_{polos\ F(\lambda)} \left\{ residuos\ de\ F(\lambda) \frac{1}{1 - e^{-T(s-\lambda)}} \right\} \\
F^*(s) &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{k=\infty} F(s + jk\omega_s) + \frac{f(0)}{2}
\end{aligned}$$

Evaluación de $F^*(s)$ - Ejemplo

Determinar $F^*(s)$ siendo que:

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(\lambda)\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)(1-e^{-T(s-\lambda)})}$$

$$\begin{aligned}
F^*(s) &= \sum_{polos\ F(\lambda)} \left\{ residuos\ de\ F(\lambda)\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}} \right\} \\
&= \sum_{polos\ F(\lambda)} \left\{ residuos\ de\ \left(\frac{1}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\right)\frac{1}{1-e^{-T(s-\lambda)}} \right\} \\
&= \left.\frac{1}{(\lambda+2)(1-e^{-T(s-\lambda)})}\right|_{\lambda=-1} + \left.\frac{1}{(\lambda+1)(1-e^{-T(s-\lambda)})}\right|_{\lambda=-2} \\
&= \frac{1}{1-e^{-T(s+1)}} - \frac{1}{1-e^{-T(s+2)}}
\end{aligned}$$

Evaluación de $F^*(s)$ - Ejemplo

Determinar $F^*(s)$ siendo que:

$$F(s) = \frac{\beta}{(s^2+\beta^2)} = \frac{\beta}{(s-j\beta)(s+j\beta)}$$

$$\begin{aligned}
F^*(s) &= \sum_{polos\;F(\lambda)} \{residuos\,de\,\} \frac{\beta}{(\lambda-j\beta)(\lambda+j\beta)(1-e^{-T(s-\lambda)})} \\
&= \frac{\beta}{(\lambda+j\beta)(1-e^{-T(s-\lambda)})}\Big|_{\lambda=j\beta} + \frac{\beta}{(\lambda-j\beta)(1-e^{-T(s-\lambda)})}\Big|_{\lambda=-j\beta} \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{-sT}e^{j\beta T}} - \frac{1}{1-e^{-sT}e^{-j\beta T}}\right) \\
&= \frac{e^{-sT}\sin(\beta T)}{1-2e^{-sT}\cos(\beta T)+e^{-2Ts}}
\end{aligned}$$

Relación entre el plano z y el plano s

Una vez que $f^*(t) \subset f(t)$ se puede afirmar que si $f(t)$ es una respuesta estable de un sistema lineal, $f^*(t)$ lo será también de un sistema muestreado lineal estable. Los sistemas estables en el plano s poseen sus polos en $\mathbb{C}^-$. Utilizando la transformación $z = e^{sT}$ se concluye que los sistemas muestreados estables deberán tener sus polos ubicados en $|z| < 1$. La representación de z es periódica pues

$$s = \sigma + j\omega \implies z = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

siendo el periodo fijado por: $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$