



Estabilidad y Respuesta temporal

Introducción

Cesáreo Raimúndez

Depto. de Ingeniería de Sistemas y Automática
ETSII-Vigo

TEMA 4: Respuesta temporal



- Respuesta temporal.
- Concepto de Estabilidad.
- Tipos de Sistemas.
- Errores en Régimen Permanente.

Respuesta Temporal de los Sistemas Lineales



En este curso trataremos apenas con sistemas lineales propios o estrictamente propios. El orden de un sistema lineal es dado por el grado del denominador de su función de transferencia. Estudiaremos la respuesta de estos sistemas cuando estimulados por tipos básicos de señales de entrada:

- impulso unitario $u(t) = \delta(t)$
- escalón unitario $u(t) = \mathbf{1}(t)$
- rampa unitaria $u(t) = t\mathbf{1}(t)$
- señal sinusoidal $u(t) = \sin(\beta t)\mathbf{1}(t)$

Sistemas de orden 1



Los sistemas de primer orden tienen la estructura general

$$G(s) = \frac{b}{s + a}$$

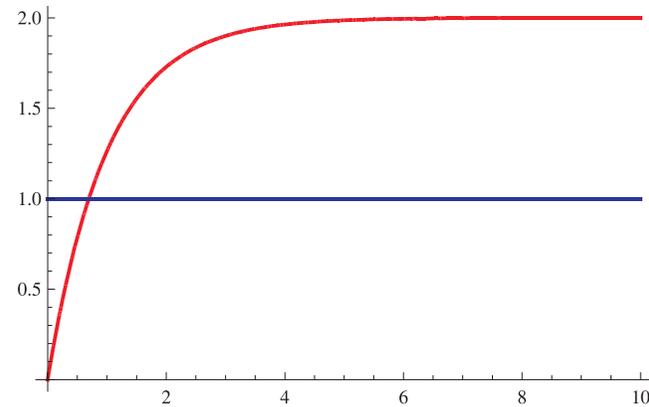
respuesta típica a escalón

$$Y(s) = \frac{b}{s + a} \frac{1}{s} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^{-1} \\ \implies \end{array} \right\} \quad y(t) = \frac{b}{a} \left(1 - e^{-at} \right) \mathbf{1}(t)$$

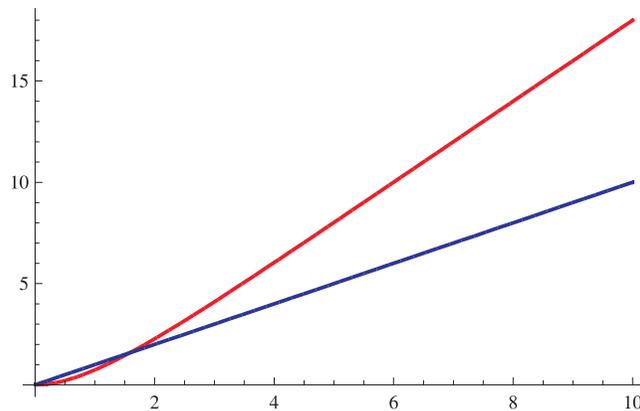
respuesta típica a rampa

$$Y(s) = \frac{b}{s + a} \frac{1}{s^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}^{-1} \\ \implies \end{array} \right\} \quad y(t) = \frac{b}{a} \left[\frac{1}{a} \left(e^{-at} - 1 \right) + t \right] \mathbf{1}(t)$$

Sistemas de orden 1



$b = 2, a = 1$ respuesta a escalón unitario



$b = 2, a = 1$ respuesta a rampa unitaria

Sistemas de orden 2



Los sistemas de orden 2 tienen la estructura

$$G(s) = \frac{sb_1 + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \equiv \frac{sb_1 + b_0}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

cuya respuesta a escalón puede escribirse como:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{c_1(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{c_2\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{c_3}{s}$$

y su anti-transformada es:

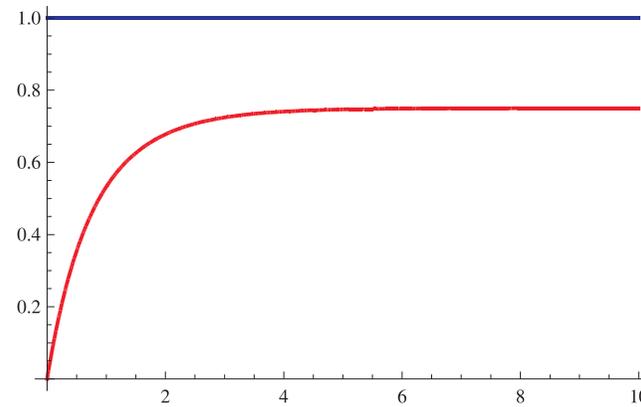
$$y(t) = \left[(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) e^{-\alpha t} + c_3 \right] \mathbf{1}(t) = \left(c_4 \sin(\beta t + \psi) e^{-\alpha t} + c_3 \right) \mathbf{1}(t)$$

donde $c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha, \beta, \psi$ se determinan unívocamente. El aspecto de la respuesta cambia a depender del valor de α y β

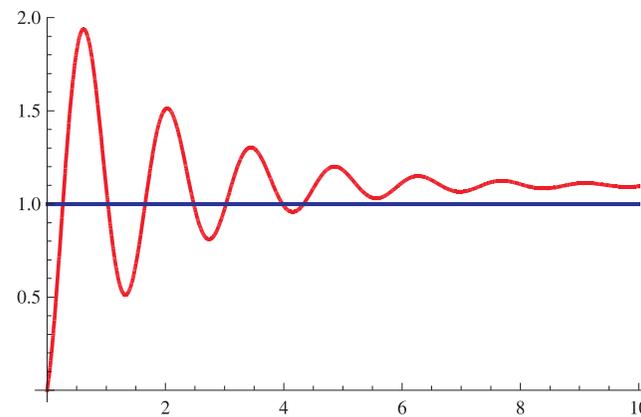
En este curso nos centraremos en los sistemas de orden 2 con la estructura

$$\frac{a^2 + b^2}{(s + a)^2 + b^2} \iff \left\{ \begin{array}{l} \omega_n^2 = a^2 + b^2 \\ \zeta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right\} \iff \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sistemas de orden 2



$$b_0 = 1.5, b_1 = 1, a_0 = 2, a_1 = 3, (a_1^2 \geq 4a_0)$$



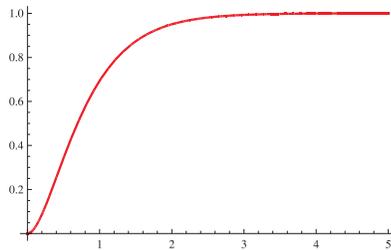
$$b_0 = 22, b_1 = 2, a_0 = 20, a_1 = 1, (a_1^2 < 4a_0)$$

Respuestas comparativas frente a escalón de un sistema típico de orden 2

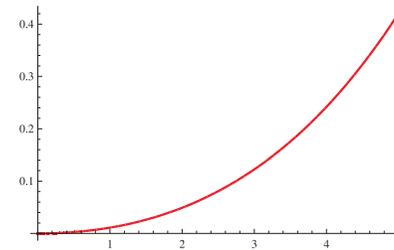
Respuestas Típicas a Escalón



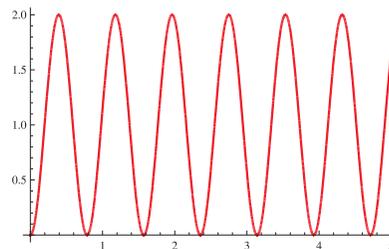
$$\frac{ab}{(s+a)(s+b)} \frac{1}{s} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{be^{-at}}{a-b} - \frac{ae^{-bt}}{a-b} \right) \mathbf{1}(t)$$



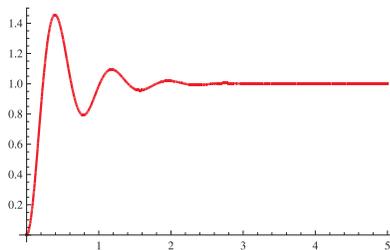
$$a = 2, b = 3$$



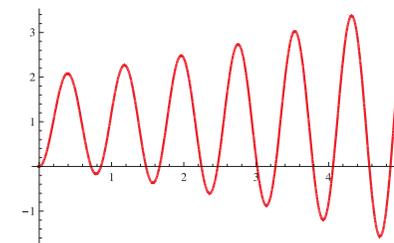
$$a = -0.1, b = -0.2$$



$$a = 8j, b = -8j$$



$$a = 2 + 8j, b = 2 - 8j$$



$$a = -0.2 + 8j, b = -0.2 - 8j$$



Los sistemas de orden n , con raíces distintas de cero y distintas entre sí en el denominador, tienen la estructura:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{\prod_{j=1}^{n_1} (s + p_j) \prod_{k=1}^{n_2} [(s + \alpha_k)^2 + \beta_k^2]}$$

con $n_1 + 2n_2 = n > m$ cuya respuesta a escalón $U(s) = 1/s$ es:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{\prod_{j=1}^{n_1} (s + p_j) \prod_{k=1}^{n_2} [(s + \alpha_k)^2 + \beta_k^2]} \frac{1}{s}$$

expandiendo

$$Y(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{B_j}{(s + p_j)} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{C_k s + D_k}{(s + \alpha_k)^2 + \beta_k^2}$$

con respuesta temporal

$$y(t) = \left(A_0 + \sum_{j=1}^{n_1} B_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{n_2} E_k e^{-\alpha_k t} \sin(\beta_k t + \psi_k) \right) \mathbf{1}(t)$$

Transitorio y Permanente



Sea la función de transferencia $G(s) = N_G(s)/D_G(s) = Y(s)/U(s)$. Sea $U(s) = N_U(s)/D_U(s)$.

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \frac{N_U(s)}{D_U(s)} = \frac{c_G(s)}{D_G(s)} + \frac{c_U(s)}{D_U(s)}$$

entonces tendremos:

$$\mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \{Y_t(s)\} + \mathcal{L}^{-1} \{Y_p(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{c_G(s)}{D_G(s)} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{c_U(s)}{D_U(s)} \right\}$$

donde los subíndices t, p son para *transitorio* y *permanente* respectivamente. Ejemplo:

$$G(s) = \frac{1}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad u(t) = \sin \beta t, \quad (U(s) = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2})$$

haciendo $c_G(s) = c_1^G s + c_0^G$, $c_U(s) = c_1^U s + c_0^U$ tendremos:

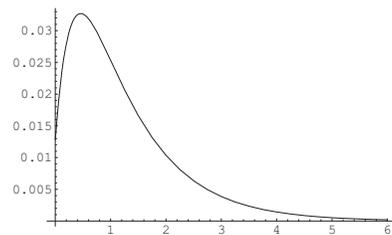
Transitorio y Permanente



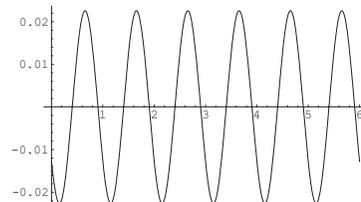
$$\begin{aligned}c_0^G &= \frac{\beta(p_1^2 + p_1 p_2 + p_2^2 + \beta^2)}{(p_1^2 + \beta^2)(p_2^2 + \beta^2)} & c_0^U &= \frac{\beta(p_1 p_2 - \beta^2)}{(p_1^2 + \beta^2)(p_2^2 + \beta^2)} \\c_1^G &= \frac{\beta(p_1 + p_2)}{(p_1^2 + \beta^2)(p_2^2 + \beta^2)} & c_1^U &= -\frac{\beta(p_1 + p_2)}{(p_1^2 + \beta^2)(p_2^2 + \beta^2)}\end{aligned}$$

Sea $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $\beta = 2\pi$ entonces

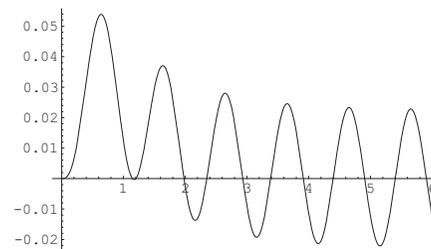
$$c_0^G = 0.168, \quad c_1^G = 0.0128, \quad c_0^U = -0.1168, \quad c_1^U = -0.0128$$



Transitoria



Permanente



Respuesta Completa



Se dice que un sistema es **BIBO** estable cuando a un estímulo de amplitud limitada, corresponde una respuesta también de amplitud limitada.

Un sistema continuo lineal y estacionario es estable entrada-salida si todos los polos de su función de transferencia tienen parte real negativa.

ESTABILIDAD CONTINUA \Leftrightarrow POLOS EN \mathbb{C}^-

Un sistema discreto lineal y estacionario es estable entrada-salida si todos los polos de su función de transferencia están ubicados en el interior del círculo unitario del plano complejo.

ESTABILIDAD DISCRETA \Leftrightarrow POLOS EN $|z| < 1$



Cualquier FT propia con polos no nulos distintos entre sí, puede colocarse en la forma $Y(s)/U(s) = G(s)$ donde

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^{n_1} \prod_{j=1}^{n_2} (s + p_j) \prod_{k=1}^{n_3} [(s + \alpha_k)^2 + \beta_k^2]}$$

haciendo $U(s) = 1/s$ tendremos:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^{n_1+1} \prod_{j=1}^{n_2} (s + p_j) \prod_{k=1}^{n_3} [(s + \alpha_k)^2 + \beta_k^2]}$$



Expandiendo tendremos:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{A_0}{s} \\ &+ \sum_{i=1}^{n_1} \frac{A_i}{s^{i+1}} \\ &+ \sum_{j=1}^{n_2} \frac{B_j}{(s + p_j)} \\ &+ \sum_{k=1}^{n_3} \frac{C_k s + D_k}{(s + \alpha_k)^2 + \beta_k^2} \end{aligned}$$

donde $n = n_1 + n_2 + 2n_3$



La respuesta temporal

$$y(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n_1} A_i \frac{t^i}{(i)!} + \sum_{j=1}^{n_2} B_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{n_3} E_k e^{-\alpha_k t} \sin(\beta_k t + \psi_k) \right) \mathbf{1}(t)$$

con

$$\psi_k = \tan^{-1} \left(\frac{\beta_k}{D_k/C_k - \alpha_k} \right)$$

es estable siempre y cuando

$$\{A_1, \dots, A_{n_1}\} = 0$$

$$\{p_1, \dots, p_{n_2}\} > 0$$

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_3}\} > 0$$



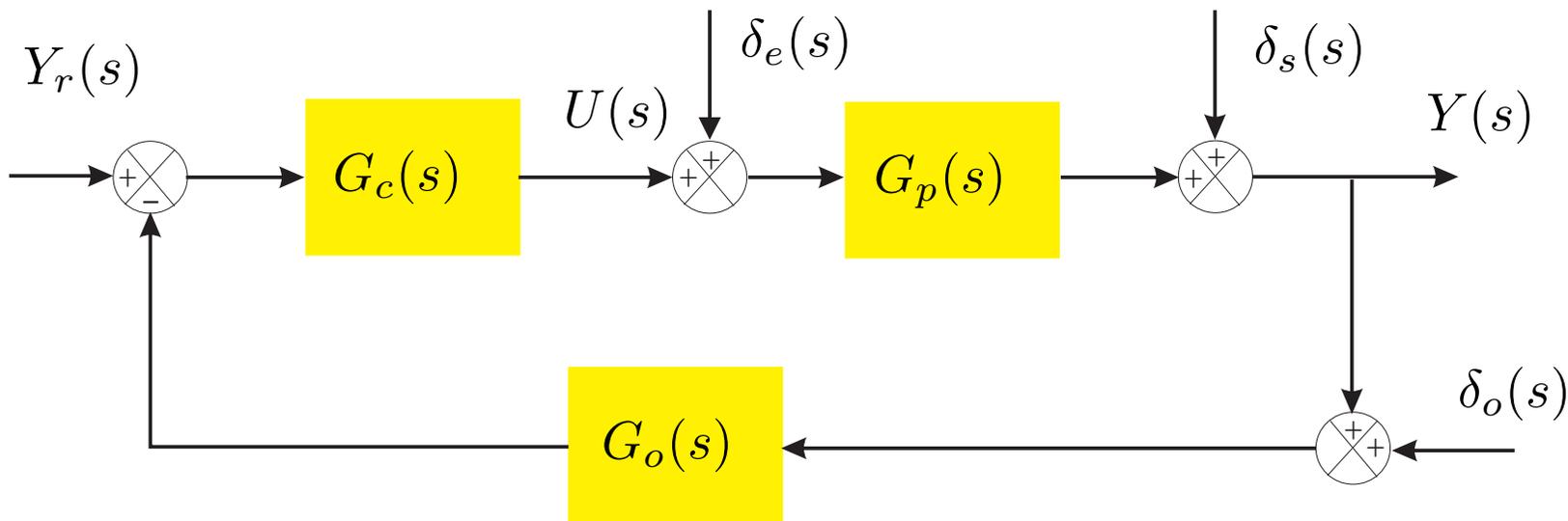
- En una función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$D(s)$ es el *polinomio característico* de $G(s)$

- Polinomio *Hurwitz* es todo polinomio cuyas raíces están en \mathbb{C}^-

Lazo típico



$Y_r(s)$	Consigna	$Y(s)$	Salida
$G_c(s)$	Controlador	$G_p(s)$	Planta
$G_o(s)$	Observador	$\delta_o(s)$	Perturbación
$\delta_e(s)$	Perturbación	$\delta_s(s)$	Perturbación
$U(s)$	Actuación		

Relaciones de Lazo



$$\begin{bmatrix} Y \\ U \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} G_p G_c & G_p & 1 & -G_p G_c G_o \\ G_c & -G_p G_c G_o & -G_c G_o & -G_c G_o \end{bmatrix}}{1 + G_o G_c G_p} \begin{bmatrix} Y_r \\ \delta_e \\ \delta_s \\ \delta_o \end{bmatrix}$$

La estabilidad depende de las raíces de

$$1 + G_o G_c G_p = 0$$

o equivalentemente

$$D_o D_c D_p + N_o N_c N_p = 0$$

Ejemplo de estabilización



Sea el péndulo invertido que debe ser mantenido en la vertical. Su dinámica está regida por

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta + \tau$$

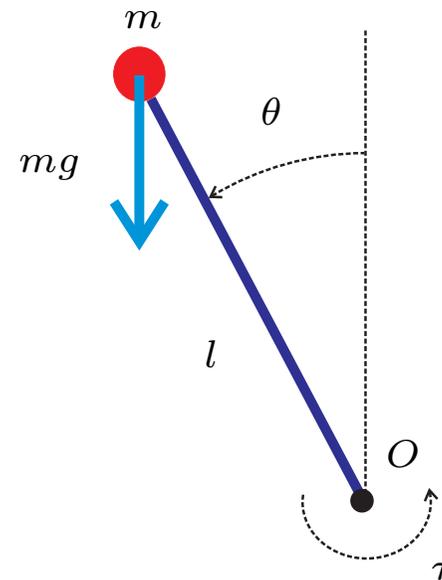
pero para $\theta \approx 0$ se tiene $\sin \theta \approx \theta$ y la ecuación linealizada en un entorno de la vertical es

$$ml^2\delta\ddot{\theta} - mgl\delta\theta = \delta\tau$$

cuya función de transferencia

$$\delta\Theta(s) = G_p(s)\delta T(s), \quad G_p(s) = \frac{k_p}{(s+p)(s-p)}$$

$$\text{con } k_p = 1/(ml), \quad p = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

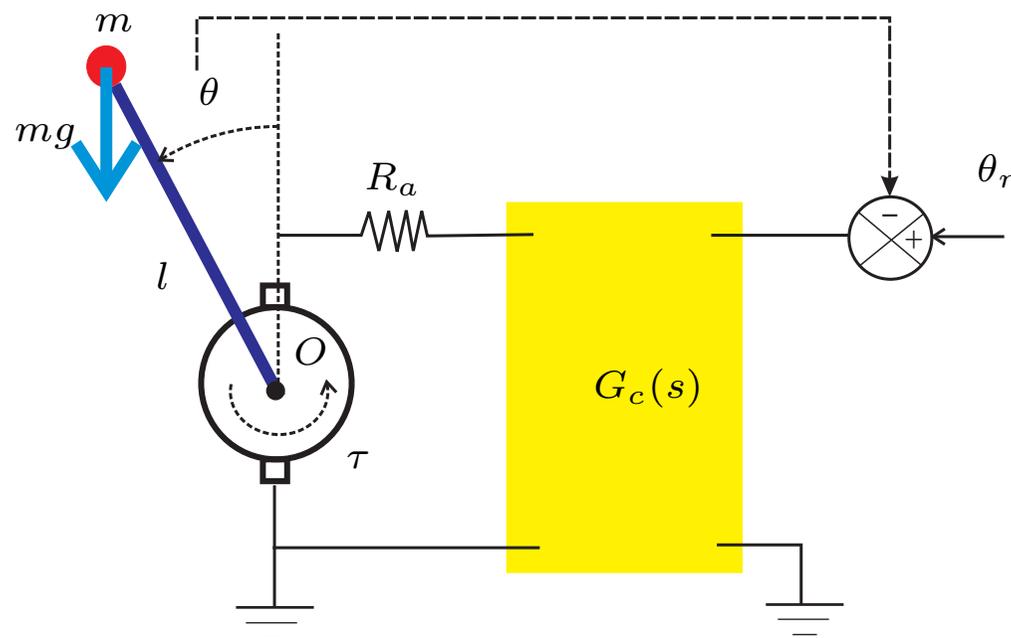


Ejemplo de estabilización



Se puede percibir nítidamente que la planta representada por la función de transferencia es inestable pues posee una raíz en el semiplano derecho ($s - p$). Para estabilizarla efectuaremos un arreglo con un motor de CC insertando en línea un controlador de dinámica dada por

$$G_c(s) = k_c \frac{s + \alpha}{s + \beta} \quad \{\alpha > 0, \beta > 0\}$$



Ejemplo de estabilización



Las ecuaciones que modelan el conjunto motor CC – péndulo son:

$$\begin{aligned}\tau &= K_T i_a \\ e_b &= K_T \dot{\theta} \\ ml^2 \ddot{\theta} &= mgl \sin \theta + \tau \\ e_a &= R_a i_a + e_b\end{aligned}$$

substituyendo tendremos:

$$ml^2 \ddot{\theta} + \frac{K_T^2}{R_a} \dot{\theta} - mgl \sin \theta = \frac{K_T}{R_a} e_a$$

efectuando la linealización ($\theta \approx 0$, $\sin \theta \approx \theta$) obtendremos la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K_T/R_a}{ml^2 s^2 + \frac{K_T^2}{R_a} s - mgl} = \frac{k_p}{(s + p_1)(s - p_2)}$$

$$\text{con } k_p = \frac{K_T}{R_a ml^2}, \quad p_1 = \frac{K_T^2}{2R_a} + \sqrt{\left(\frac{K_T^2}{2R_a}\right)^2 + m^2 l^3 g}, \quad p_2 = \sqrt{\left(\frac{K_T^2}{2R_a}\right)^2 + m^2 l^3 g} - \frac{K_T^2}{2R_a}$$

Ejemplo de estabilización



La función de transferencia de lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{k_c k_p (s + \alpha)}{(s + \beta)(s + p_1)(s - p_2) + k_c k_p (s + \alpha)}$$

La misión del controlador es la estabilización de la planta resultante (lazo cerrado). El controlador debe escogerse para que esto sea posible. El controlador debe necesariamente ser estable $\{\alpha > 0, \beta > 0\}$. Haciendo $\alpha = p_1$ podremos simplificar la $G(s)$ para

$$G(s) = \frac{k_c k_p}{(s + \beta)(s - p_2) + k_c k_p} = \frac{k_c k_p}{s^2 + (\beta - p_2)s + k_c k_p - \beta p_2}$$

de donde se concluye que para obtener estabilidad en lazo cerrado es suficiente observar

$$\beta > p_2, \quad k_c > \frac{\beta p_2}{k_p}$$

lo que siempre es posible.



Suponiendo $G(s) = Y(s)/Y_r(s)$ estable y $y_r(t)$ limitada, para que $e(\infty) = y_r(\infty) - y(\infty) = 0$ para entrada en escalón unitario, es necesario y suficiente que $G(0) = 1$ o sea:

$$G(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)}$$

para que se verifique $G(0) = 1$ es suficiente que $D_c(0)D_p(0) = 0$, lo cual implica que s sea raíz del polinomio $D_c(s)D_p(s)$



El tipo de una planta en lazo abierto es igual al número de raíces de cero que posee su denominador

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \frac{s+1}{s+2} && \text{tipo 0} \\ &= \frac{s+1}{s(s+2)} && \text{tipo 1} \\ &= \frac{s+1}{s^2(s+2)} && \text{tipo 2} \\ &\vdots && \vdots \\ &= \frac{s+1}{s^n(s+2)} && \text{tipo n} \end{aligned}$$

Valor Final - Tipos



Con realimentación unitaria el error en régimen permanente queda influenciado por el tipo de la planta. Sea $G(s)$ estable: entonces para $n > 0$ tendremos:

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = G(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)} = \frac{\frac{N(s)}{s^n D(s)}}{1 + \frac{N(s)}{s^n D(s)}} = \frac{N(s)}{s^n D(s) + N(s)}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s(1 - G(s))Y_r(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s^{n+1} D(s)}{s^n D(s) + N(s)} Y_r(s) \right)$$

$$\text{si, } Y_r(s) = 1/s^k, \Rightarrow e_k(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{s^{n-k+1} D(s)}{s^n D(s) + N(s)} \right)$$

$$n = 0 \quad \rightarrow \quad e_k(\infty) = \frac{1}{1 + G_p(0)}$$

$$k < n + 1 \quad \rightarrow \quad e_k(\infty) = 0$$

$$k = n + 1 \quad \rightarrow \quad e_k(\infty) = \frac{D(0)}{N(0)}$$

$$k > n + 1 \quad \rightarrow \quad e_k(\infty) = \infty$$

Valor Final - Tipos



	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$
Tipo 0	$\left(\frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+G_p(0)} \right)$	∞	∞
Tipo 1	0	$\left(\frac{1}{k_v} = \frac{D(0)}{N(0)} \right)$	∞
Tipo 2	0	0	$\left(\frac{1}{k_a} = \frac{D(0)}{N(0)} \right)$

Tabla de valores estacionarios del error para

$G_{lc}(s) = G_p(s)/(1 + G_p(s))$ estable. La primera línea $(\frac{1}{s}, \dots)$ representa el tipo de referencia a seguir. $G_p(s) = N(s)/(s^n D(s))$

TEMA 5: Análisis Temporal



- Especificaciones de la respuesta para sistemas de orden 2.
- Polos dominantes.
- Reducción de funciones de transferencia
- Criterio de Routh-Hurwitz.
- Diagrama del Lugar de las Raíces.



De modo general los sistemas estables de orden elevado se estudian utilizando apenas su dinámica más lenta. Esta dinámica lenta está representada por el par de polos más próximos al eje imaginario. O sea:

$$G(s) = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{B_j}{(s + p_j)} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{C_k s + D_k}{(s + \alpha_k)^2 + \beta_k^2} \approx \frac{\lambda}{(s + \alpha_{k^*})^2 + \beta_{k^*}^2}$$

con $n_1 + 2n_2 = n > m$ y donde

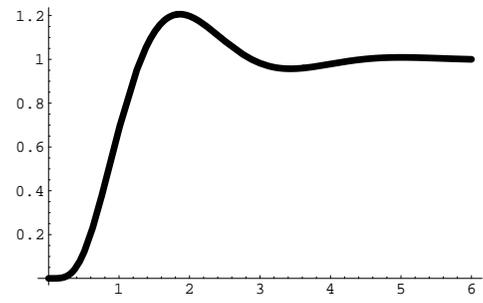
$$\alpha_{k^*} = \min(\{\alpha_k, p_j\})(\forall \{j, k\}), \quad \lambda = G(0) (\alpha_{k^*}^2 + \beta_{k^*}^2)$$

Supondremos que $\alpha_{k^*} < p_j, \forall j$ ya que caso contrario, tendríamos un polo real dominante como por ejemplo p_j^* cuando la fórmula para λ quedaría: $\lambda = G(0)p_j^*$

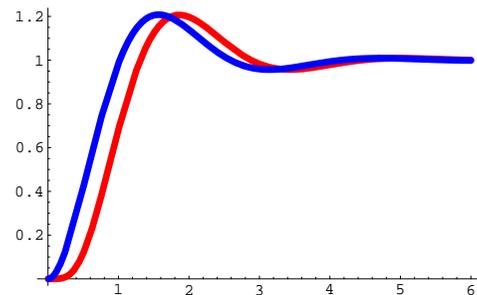
Polos Dominantes - Ejemplo



$$G(s) = \frac{2750}{(s + 10)[(s + 5)^2 + 30][(s + 1)^2 + 4]}$$



$$G'(s) = \frac{5}{(s + 1)^2 + 4} \approx G(s)$$



Cancelación



Cuando en las función de transferencia ocurran ceros (raíces del denominador) y polos (raíces del denominador) muy próximos y ubicados ambos en el semiplano complejo negativo, se pueden cancelar sin que el resultado en el comportamiento de entrada-salida sea apreciable. La cancelación implica en pérdida de observabilidad pero si el polo cancelado fuere estable, su eliminación no causará problemas.

$$\frac{s + a + \delta}{s + a} = 1 + \frac{\delta}{s + a}$$

Sea $\delta = |z - p|$ donde z indica un cero y p un polo. Para que la cancelación pueda efectuarse es necesario que

$$\frac{\delta}{\min\{|p|, |z|\}} < \epsilon \ll 1$$

donde ϵ depende de una valoración adecuada. En estas condiciones se puede despreciar la contribución del término $\frac{\delta}{s + a}$ cuya respuesta a escalón es $\delta e^{-at} \mathbf{1}(t)$ ya que

$$\delta e^{-at} \mathbf{1}(t) \ll \mathbf{1}(t)$$

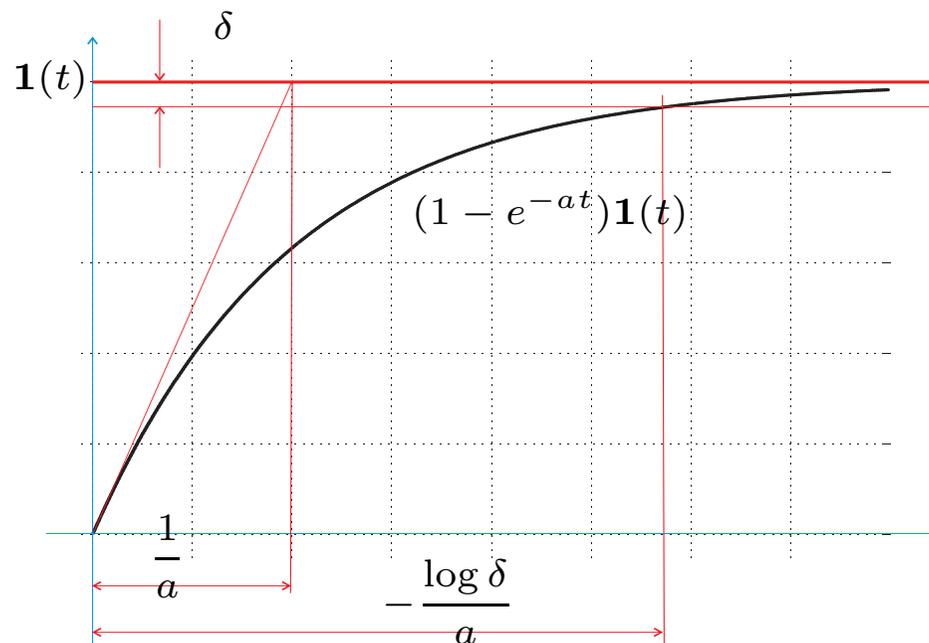
Polo Real



Si la dinámica dominante fuere responsabilidad de un polo real entonces la respuesta a escalón queda completamente caracterizada por:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{a}{s + a}$$

$$u(t) = \mathbf{1}(t) \implies y(t) = (1 - e^{-at}) \mathbf{1}(t)$$





Función de transferencia típica de orden 2

$$G(s) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{s^2 + as + K} \\ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \\ \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{array} \right.$$

donde

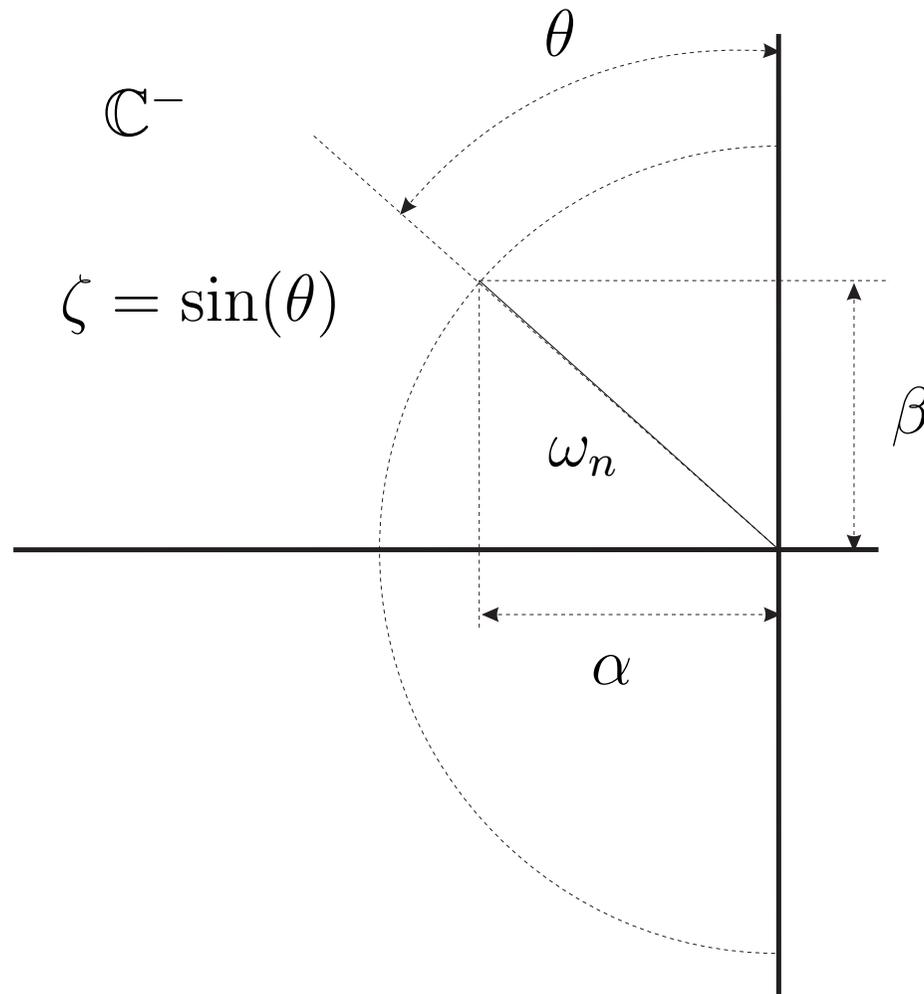
$$K = \alpha^2 + \beta^2$$

$$a = 2\alpha$$

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n}$$

Par de polos





La respuesta temporal del par de polos a una entrada a escalón unitario

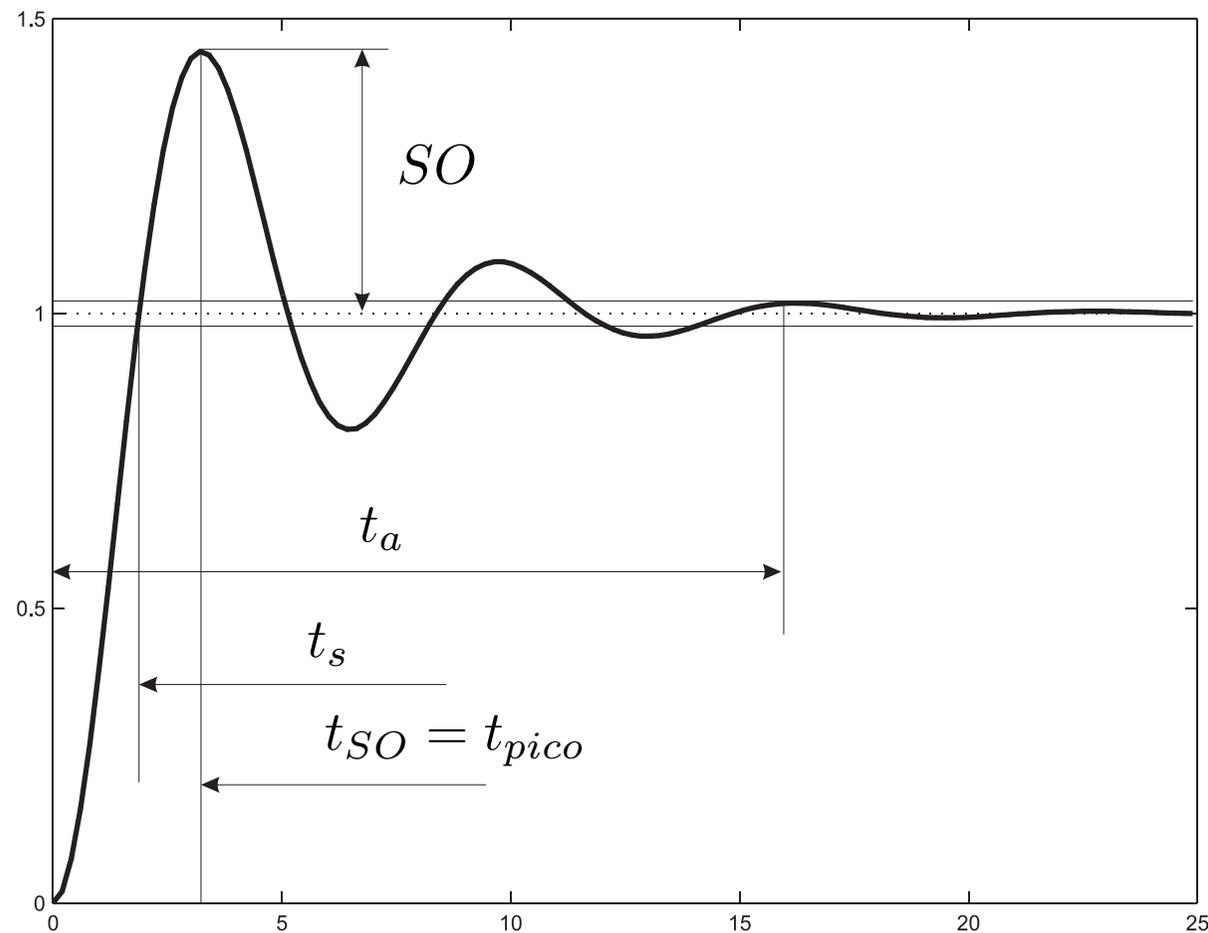
$$y(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \psi) \right) \mathbf{1}(t) \\ \left(1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \psi) \right) \mathbf{1}(t) \end{cases}$$

$$\psi = \arctan(-\beta/\alpha)$$

Respuesta Típica Orden 2



La respuesta típica a escalón para un sistema estable de orden 2





La máxima sobreoscilación se verifica para:

$$\max_t y(t) \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = 0$$

$$0 = -\alpha e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \psi) + \beta e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \psi)$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin(\beta t - \psi)}{\cos(\beta t - \psi)}$$

$$\tan(\beta t - \psi) = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \beta t - \psi \pm k\pi$$

$$\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \beta t - \arctan\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right) \pm k\pi$$

$$\beta t = k\pi$$

Escogiendo para $k = 1$ se llega a $t_{SO} = t_{pico} = \frac{\pi}{\beta}$.

$$y(t_{SO}) = 1 + SO$$

$$= 1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\cdot SO = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\pi \tan \theta}$$



La condición de tiempo de asentamiento

$$|y(t) - \mathbf{1}(t)| < 0.05$$

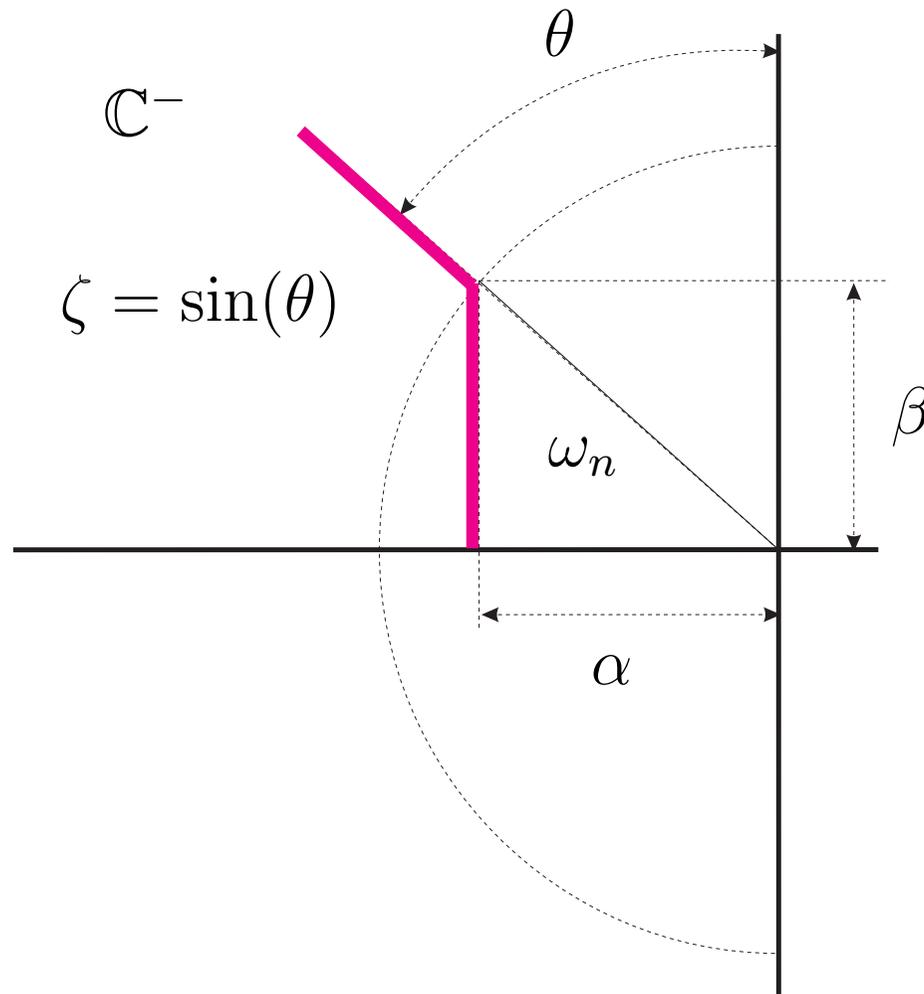
nos da aproximadamente:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\zeta\omega_n t_a} = e^{-\zeta\omega_n t_a} / \cos \theta \leq |y(t_a) - \mathbf{1}(t_a)| = 0.05$$

de donde se saca

$$t_a \geq \frac{1}{\alpha} \log_e \left(\frac{20}{\cos \theta} \right), \quad \alpha = \zeta\omega_n$$

Región de Proyecto



Caso de cero estable en el numerador



Cuando $\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{Cs + D}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$ se puede aplicar el mismo método, siguiendo los pasos:

1. Se efectúa la ubicación de polos de acuerdo con

$$G'(s) = \frac{Y(s)}{U'(s)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

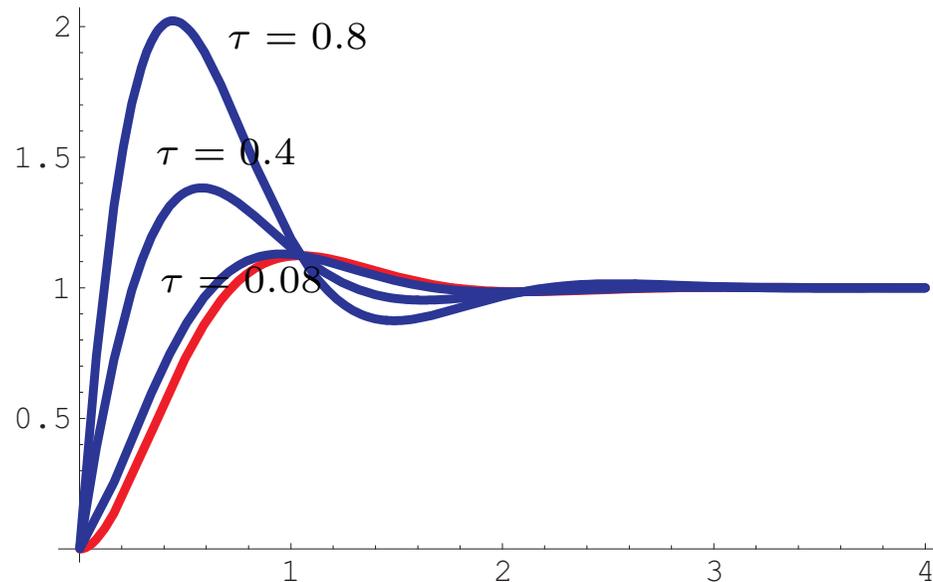
2. Se efectúa un pre-filtrado de la entrada de acuerdo con

$$U(s) = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{(Cs + D)} U'(s).$$

Ceros Adicionales



Sea $G(s) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$. Incorporando un cero en el numerador en la forma normalizada $(\tau s + 1)$ la respuesta a escalón se altera de modo a "anticiparse" la respuesta. También el transitorio aparece de forma más pronunciada conforme puede observarse en la figura

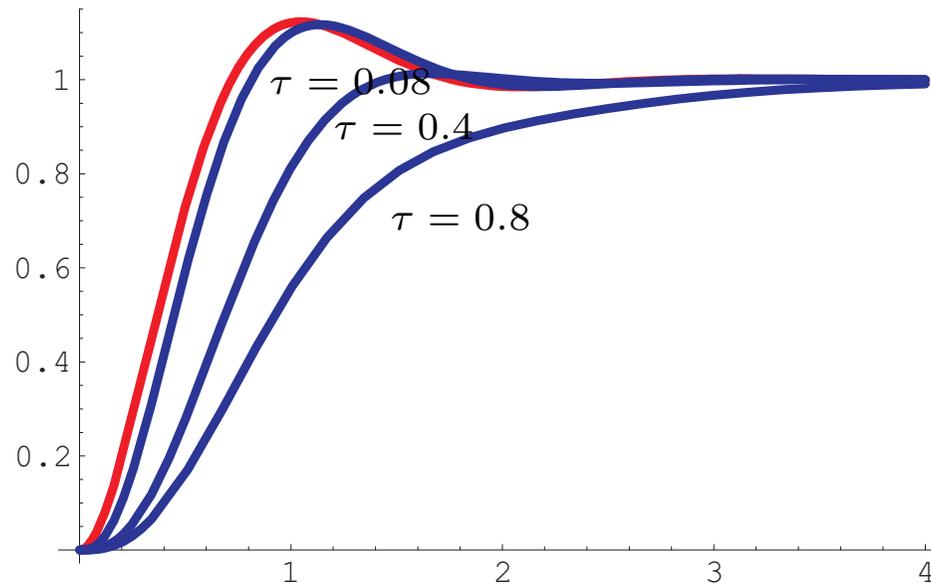


Valores adoptados $\alpha = 2$, $\beta = 3$

Polos Adicionales



Sea $G(s) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$. Incorporando un polo en el denominador en la forma normalizada $(\tau s + 1)$ la respuesta a escalón se altera de modo a "retrasar" la respuesta. También el transitorio aparece de forma más atenuada conforme puede observarse en la figura



Valores adoptados $\alpha = 2$, $\beta = 3$

Polinomio característico



Independientemente Routh (1874) y Hurwitz (1895) desarrollaron una condición *suficiente* para la estabilidad de sistemas lineales, que consiste en el cálculo de un arreglo sobre los coeficientes del polinomio característico ($\{a_k\}$). La condición necesaria es que se verifique $\{a_k > 0\} \forall k$. O sea: si en la ecuación

$$\prod_{k=1}^{k=n} (s + s_k) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 \quad (1)$$

se verifica que $s_k \in \mathbb{C}^-$ entonces necesariamente tendremos que $\{a_k\}_{k=0}^{k=n-1} > 0$.
Ocurre que esta condición no es suficiente ya que por ejemplo, el polinomio

$$(s + 2)(s^2 - s + 4) = s^3 + s^2 + 2s + 8$$

no es estable.

Criterio de Routh-Hurwitz



Este criterio sirve para determinar si un polinomio característico es Hurwitz. Sea

$$p_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
$n - 1$	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
$n - 2$	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	\dots
$n - 3$	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	\dots
\vdots	\vdots			
0	h_{n-1}			

Criterio de Routh-Hurwitz



$$b_{n-1} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

El criterio de Routh-Hurwitz establece que $p_n(s)$ es Hurwitz si y solo si todos sus coeficientes son positivos y además la primera columna a la izquierda de la tabla calculada tiene todos sus elementos positivos.

Ejemplo de Aplicación



Sea la planta dada por:

$$G_p(s) = \frac{k_p}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Se desea estabilizarla con un controlador de estructura

$$G_c(s) = k_c \frac{(s+a)}{s}$$

La función de transferencia de lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

o sea

$$G(s) = \frac{k_c k_p (s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3) + k_c k_p (s+a)}$$

El denominador (polinomio característico) es:

$$p_4(s) = s(s+1)(s+2)(s+3) + k_c k_p (s+a)$$



Ejemplo de Aplicación

$$p_4(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (k_c k_p + 6)s + k_c k_p a$$

Llamando $K = k_c k_p$ y efectuando el cálculo del arreglo se llega a:

4	1	11	Ka
3	6	$K + 6$	
2	b_3	b_1	
1	c_3		
0	d_3		

$$b_3 = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 6 & K + 6 \end{vmatrix}, \quad b_1 = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & Ka \\ 6 & 0 \end{vmatrix}, \quad c_3 = -\frac{1}{b_3} \begin{vmatrix} 6 & K + 6 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad d_3 = Ka$$

donde $b_3 = (60 - K)/6$ y $c_3 = K + 6 - 6Ka/b_3$ imponiendo ahora que no haya cambios de signo en la primera columna del arreglo se obtiene la condición:

$$0 < a < \frac{(60 - K)(K + 6)}{36K}$$

Lugar de Raíces (LR)



El LR es una técnica gráfica para determinar la ubicación de las raíces de un polinomio en función de un parámetro. En un lazo de realimentación unitaria con controlador proporcional se tiene:

$$G(s) = \frac{k_c G_p(s)}{1 + k_c G_p(s)} = \frac{k_c (N_p(s)/D_p(s))}{1 + k_c (N_p(s)/D_p(s))} = \frac{k_c N_p(s)}{D_p(s) + k_c N_p(s)}$$

El polinomio característico de $G(s)$ es $D_p(s) + k_c N_p(s)$ y su LR es el conjunto

$$\Gamma(k_c) = \{s(k_c) \mid D_p(s(k_c)) + k_c N_p(s(k_c)) = 0, 0 < k_c < \infty\}$$

Lugar de Raíces (LR)



El trazado del LR tiene como base la representación polar de la ecuación compleja:

$$0 = 1 + k_c G_p(s) = \begin{cases} |G_p(s)| = \frac{1}{k_c} \\ \angle G_p(s) = \pi \pm 2\nu\pi \end{cases}$$

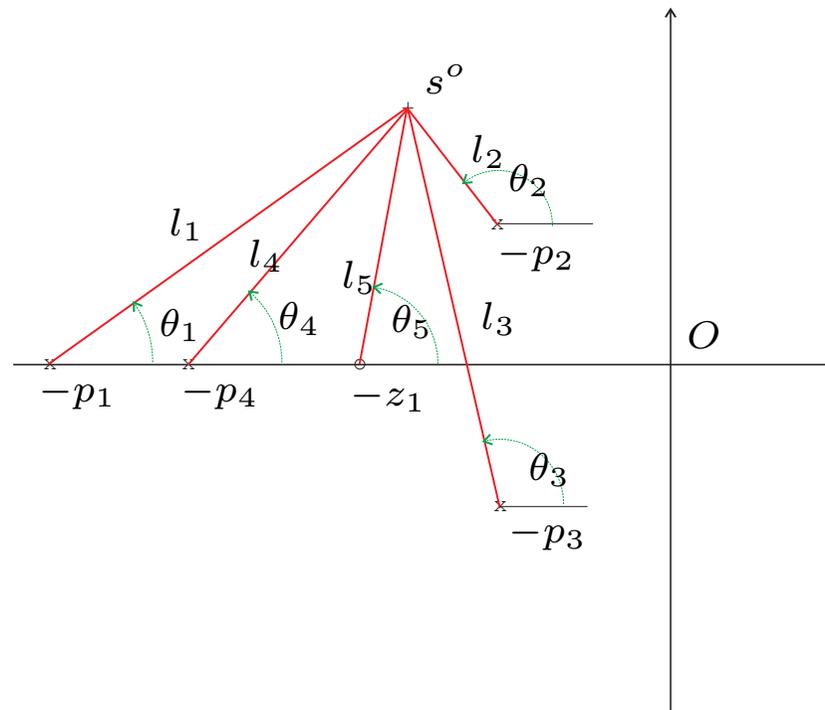
El LR se traza básicamente utilizando la propiedad angular.



Cálculo del módulo y fase de $G(s)$

Sea $G(s) = \frac{K(s + z_1)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)}$ entonces tendremos:

$$|G(s^o)| = \frac{Kl_5}{l_1l_2l_3l_4}, \quad \angle G(s^o) = \theta_5 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4)$$



Reglas para el Trazado del LR



1. Dibujar los polos y ceros de $G_p(s)$.
2. Dibujar la parte real del LR.
3. Determinar el centroide y direcciones de asíntotas.
4. Determinar los puntos de bifurcación.
5. Determinar los ángulos de salida/llegada.
6. Calcular los cruces con el eje imaginario.
7. Completar el trazado del LR.

Caso típico



Consideremos un controlador $G_c(s)$ y una planta $G_p(s)$ de acuerdo con:

$$G_c(s) = k_c \frac{s + 3}{s^2 + 4s + 5} \quad G_p(s) = \frac{100}{(s - 0.5)(s + 4)}$$

Consideraremos

$$G_{cp}(s) = \frac{100(s + 3)}{(s^2 + 4s + 5)(s - 0.5)(s + 4)}$$

lo que da el polinomio característico

$$(s + 2 + j)(s + 2 - j)(s - 0.5)(s + 4) + 100k_c(s + 3) = 0$$

Polos y Ceros de $G_{cp}(s)$



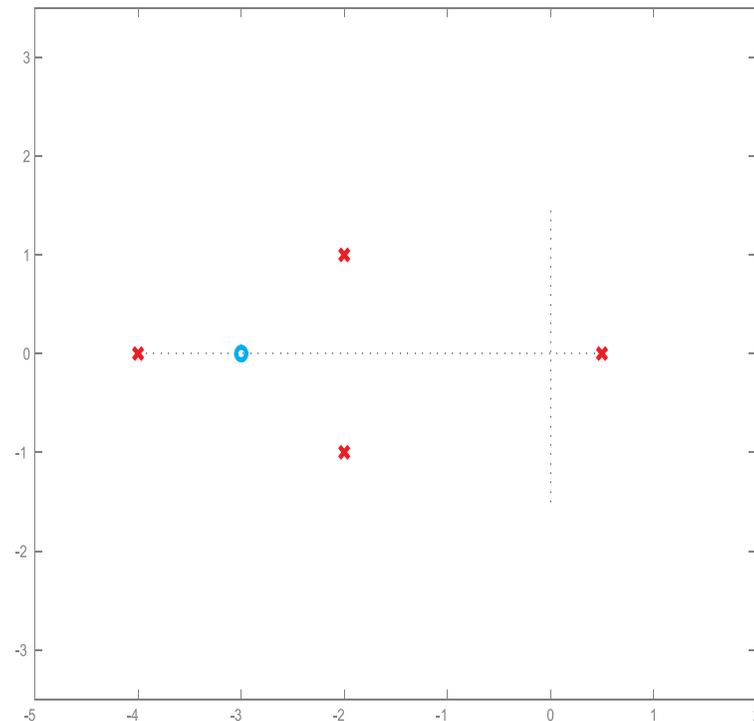
Para $k_c = 0$ se tiene

$$\Gamma(0) = \{-4, -2 + j, -2 - j, 0.5\}$$

y para $k_c \rightarrow \infty$

$$\Gamma(\infty) = \{-3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son tres asíntotas por determinar.



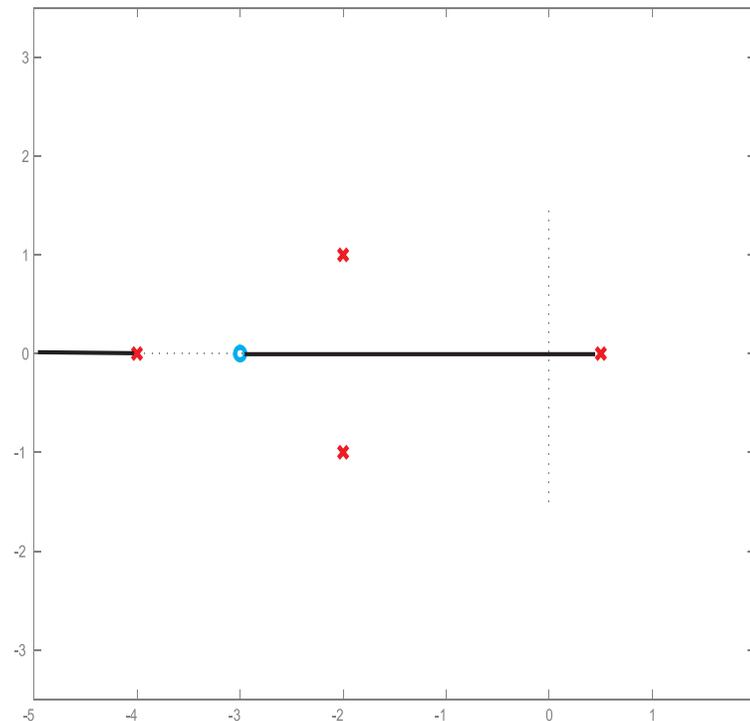
LR en el eje real



$$\angle G_{cp}(s) = -\pi$$

de donde es fácil deducir
que:

A la izquierda de un número impar de polos y/o ceros el LR está sobre el eje real.





Centroide y asíntotas

Para el centroide

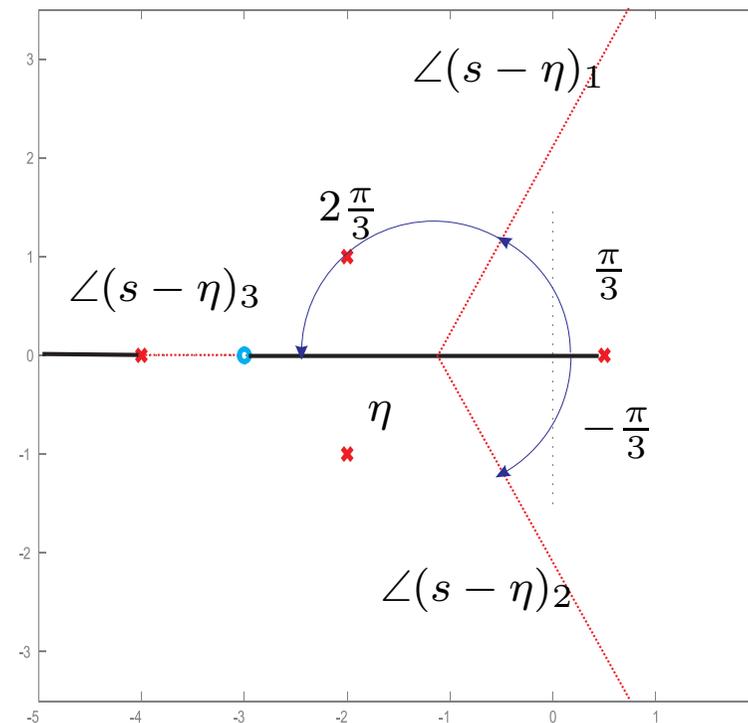
$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m}$$

y para las asíntotas

$$\angle(s - \eta)_\nu = \frac{-\pi \pm 2\nu\pi}{n - m}$$

donde $n - m$ es el exceso y

$$\nu = 1, 2, \dots,$$



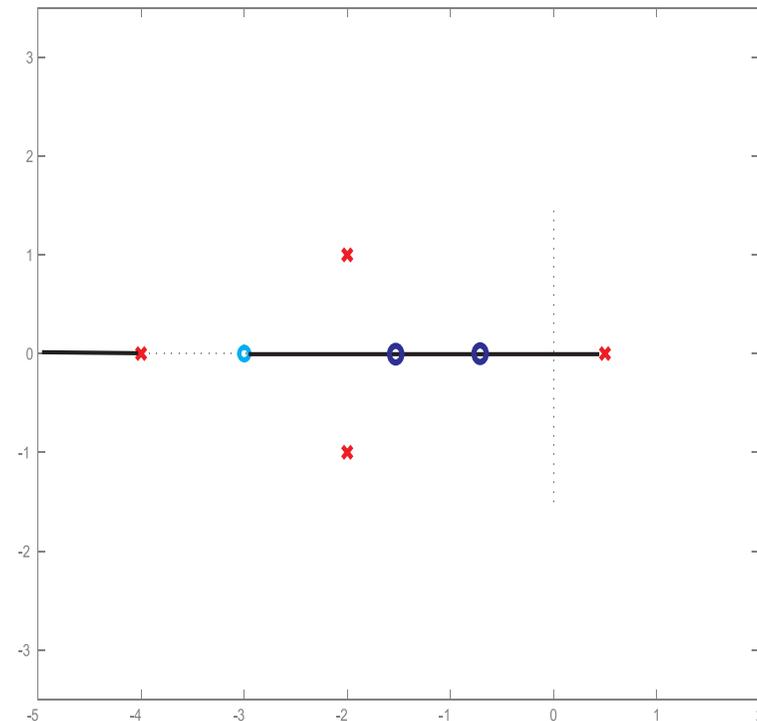
Puntos de bifurcación



Los puntos de bifurcación se localizan en los puntos de inflexión horizontal de la curva $k_c = k_c(s)$. Si el lugar fuere dado por $s(k_c)$ entonces se encuentran entre las soluciones de

$$\frac{dk_c}{ds} = \frac{D_{cp}N'_{cp} - D'_{cp}N_{cp}}{N_{cp}^2} = 0$$

los puntos de bifurcación son las soluciones para las cuales $k_c > 0$



Puntos de bifurcación - Cálculo



```
In[15]:= Nc = s + 3;  
Dc = s^2 + 4 s + 5;  
Np = 100;  
Dp = s^2 + 3.5 s - 2;  
Ncp = Nc Np;  
Dcp = Dc Dp;  
lista = Solve[Dcp D[Ncp, s] - D[Dcp, s] Ncp == 0, s]
```

```
Out[21]= {{s → -3.38506 - 0.736282 i},  
          {s → -3.38506 + 0.736282 i}, {s → -1.53172}, {s → -0.698154}}
```

```
In[22]:= K = (-Dcp / Ncp) /. lista
```

```
Out[22]= {-0.0689795 + 0.125224 i,  
          -0.0689795 - 0.125224 i, 0.0416442, 0.0463148}
```

Ángulos de salida/llegada

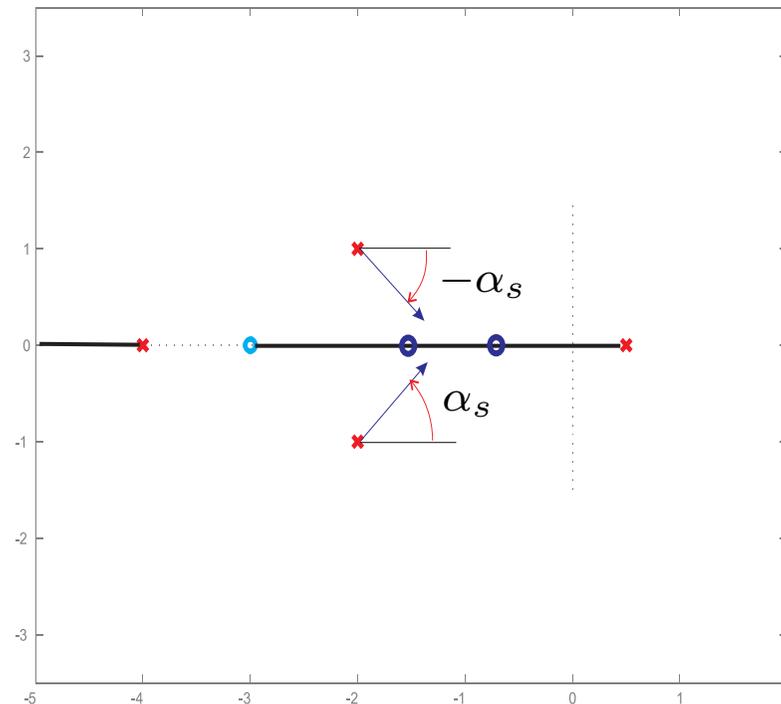


Los ángulos de **salida** (polos complejos) se calculan de acuerdo con:

$$\alpha_s = \pi + \sum_{i=1}^m \theta_i - \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j$$

donde θ_i es el ángulo del i -ésimo cero al polo y ϕ_j el ángulo del j -ésimo polo al polo considerado. Para los de **llegada** (ceros complejos) vale:

$$\alpha_l = \pi - \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j$$

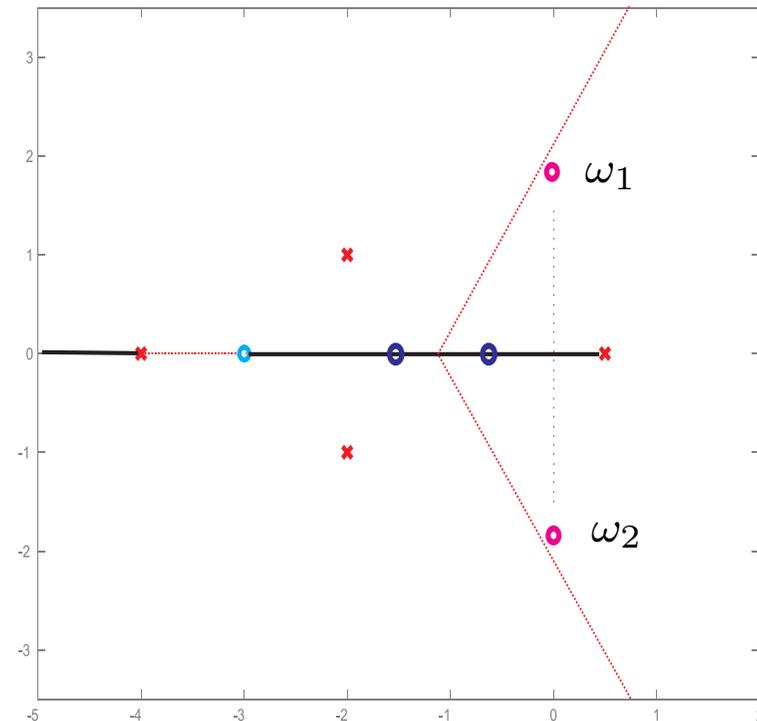




Cruces con el eje imaginario

Los cruces con el eje imaginario se obtienen calculando las soluciones con $\omega \in \mathbb{R}$ de la ecuación

$$1 + k_c \frac{N_{cp}(j\omega)}{D_{cp}(j\omega)} = 0$$



Cruces con el eje imaginario - Cálculo



```
In[23]:= Clear[K]
```

```
In[33]:= pol = ComplexExpand[(Dcp + K Ncp) /. {s -> i w}]
```

```
Out[33]= -10 + 300 K - 17. w2 + w4 + i (9.5 w + 100 K w - 7.5 w3)
```

```
In[34]:= partereal = -10 + 300 K - 17 w2 + w4;  
parteinag = 9.5 w + 100 K w - 7.5 w3;
```

```
In[37]:= lista = Solve[{partereal == 0, parteinag == 0}, {K, w}]
```

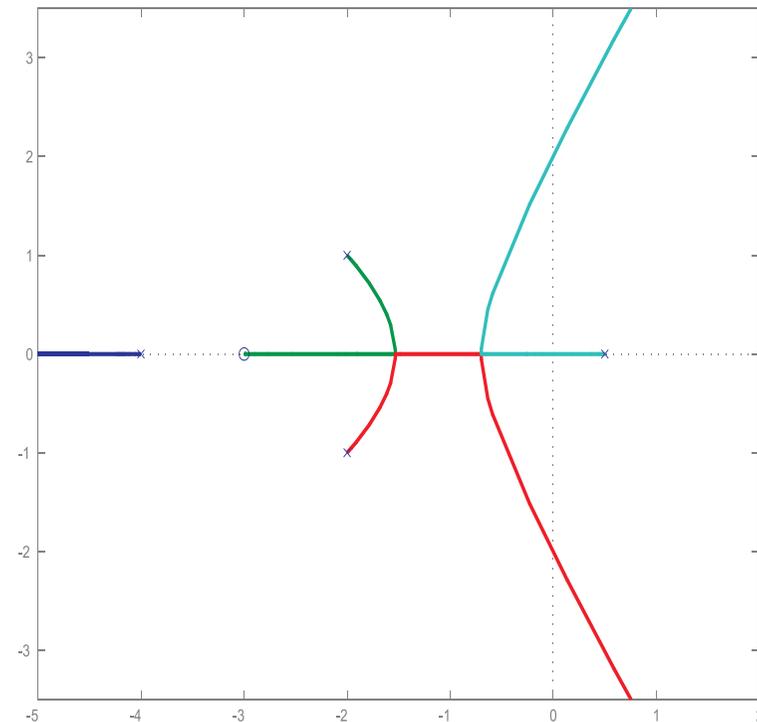
```
Out[37]= {{K -> -0.81027, w -> 0. - 3.08819 i}, {K -> -0.81027, w -> 0. + 3.08819 i},  
{K -> 0.0333333, w -> 0.}, {K -> 0.20777, w -> -2.00921}, {K -> 0.20777, w -> 2.00921}}
```

Trazado final



Al completarse la gráfica llegamos al resultado que puede obtenerse con los comandos MATLAB

```
numc = [1 3], denc = [1 4 5]
nump = [100]
denp = conv([1 -0.5], [1 4])
numcp = conv(numc, nump)
dencp = conv(denc, denp)
rlocus(numcp, dencp)
axis([-5 2 -3.5 3.5])
```



Propiedades Generales del LR



- El número de ramas independientes es igual al número de polos.
- El LR es simétrico en relación al eje real.
- Las ramas del LR se dirigen de los polos ($k_c = 0$) a los ceros propios o impropios (asintóticos) ($k_c \rightarrow \infty$).
- El número de ceros asymptóticos es igual al exceso $(n - m)$.