1. Compensación com PI

1.1. Ejemplo - 1. La planta

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+3)^2 + 2^2}$$

debe compensarse de modo que en lazo cerrado exhiba las características:

1. Error nulo en régimen permanente para entrada en escalón
2. Margen de Fase $MF \geq 80°$
3. El ancho de banda de lazo abierto no debe aumentar.

Solución
Para que la planta compensada en lazo cerrado siga una consigna en escalón con error nulo en régimen permanente es necesario que el agregado planta-compensador sea de tipo 1. La planta es de tipo 0 por tanto, el polo que falta debe proporcionarlo el compensador. El ancho de banda no debe aumentar, lo que descarta la utilización de un PID. Por esta razón escogemos un PI para efectuar la compensación, ya que éste exhibe un polo en origen. El compensador tendrá pues la estructura

$$PI(s) = k_c \frac{(s/\omega_o + 1)}{(s/\omega_o)}$$

La gráfica de bode de la planta $G_p(s)$ se elabora sobre la versión normalizada que le es equivalente o sea

$$(3^2 + 2^2)G_p(s) = \frac{1}{(s/\sqrt{13})^2 + 2\zeta(s/\sqrt{13}) + 1}$$

con $\zeta = 3/\sqrt{13} = 0.83$, resultando la Figura 1.

Analizando las características frecuenciales del compensador (Figura 2) adoptamos para ω_o el valor $\omega_o = \sqrt{13}$. Acto seguido se presentan en la misma gráfica las características conjuntas controlador-planta (Figura 3).

El aspecto final del conjunto compensador-planta normalizados, se puede observar en la Figura 4

Para obtener el margen de fase deseado se debe trasladar el módulo para bajo (Ganancia < 1) de modo que el nuevo punto de corte defina el margen de 80^o. El

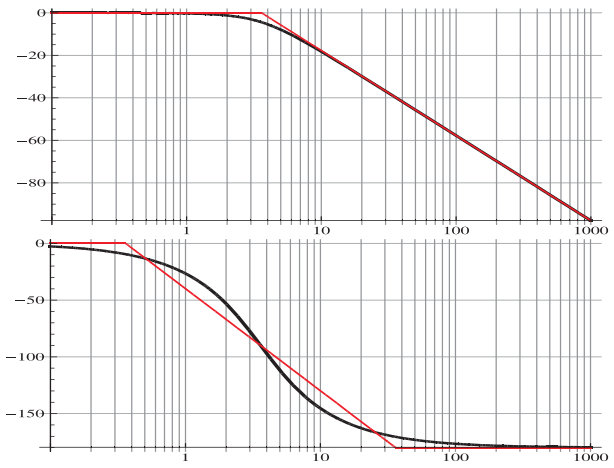

FIGURA 1. Planta normalizada $\dfrac{1}{(s/\sqrt{13})^2 + 2\zeta(s/\sqrt{13}) + 1}$

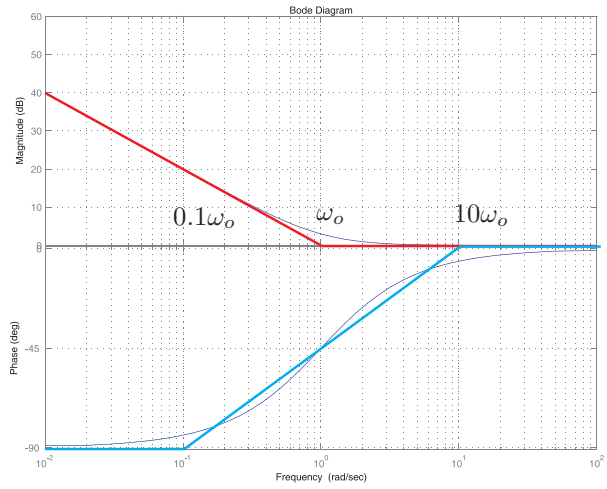

FIGURA 2. Características frecuenciales del $PI(s)/k_c$

procedimiento está indicado en la misma Figura 4 de donde se saca

$$20\log_{10}\left(\frac{k_c}{3^2+2^2}\right) \approx -15dB \Rightarrow k_c = 13\cdot 10^{-\frac{15}{20}}$$

Finalmente se llega al PI

$$PI(s) = k_c\frac{s/\sqrt{13}+1}{s/\sqrt{13}} = k_c\frac{s+\sqrt{13}}{s}$$

1.2. Ejemplo - 2. La planta

$$G_p(s) = \frac{800000}{s(s+400)}$$

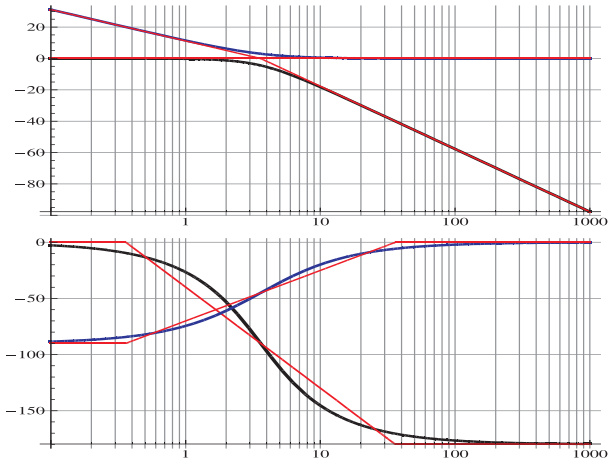

FIGURA 3. Planta y Compensador sobrepuestos

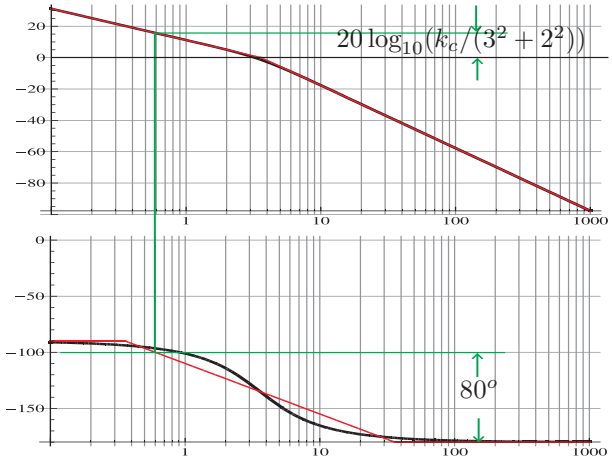

FIGURA 4. Gráfica normalizada final

debe ser compensada de forma que en lazo cerrado exhiba las características:

1. Error nulo en régimen permanente para entrada en rampa (velocidad)
2. Margen de Fase $MF \geq 80°$
3. El ancho de banda de lazo abierto no debe aumentar.

Solución

Para que la planta compensada en lazo cerrado siga una consigna en rampa con error nulo en régimen permanente es necesario que el agregado planta-compensador sea de tipo 2. La planta es de tipo 1 por tanto, el polo que falta debe proporcionarlo el compensador. El ancho de banda no debe aumentar, lo que descarta la utilización de un PID. Por esta razón escogemos un PI para efectuar la compensación, ya que éste exhibe un polo en origen.

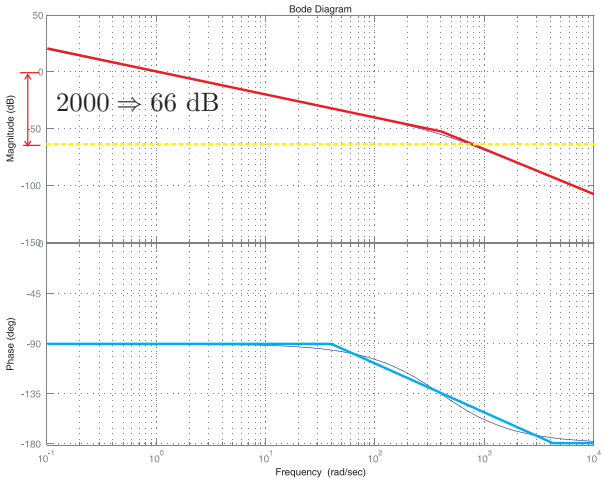

FIGURA 5. Planta normalizada $\dfrac{1}{s(s/400+1)}$

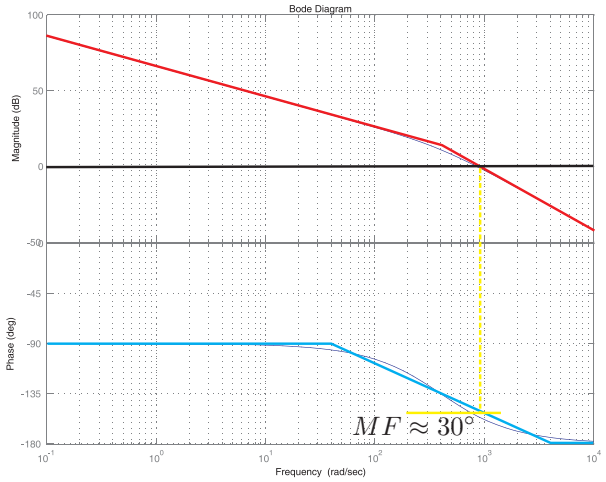

FIGURA 6. Planta $\dfrac{2000}{s(s/400+1)}$

La gráfica de bode de la planta $G_p(s)$ se elabora sobre la versión normalizada que le es equivalente o sea

$$\frac{G_p(s)}{2000} = \frac{1}{s(s/400+1)}$$

resultando la gráfica que puede observarse en la Figura 5.

Al sumarse la constante 2000 (en dB vale ≈ 66) tendremos el aspecto final de la Figura 6

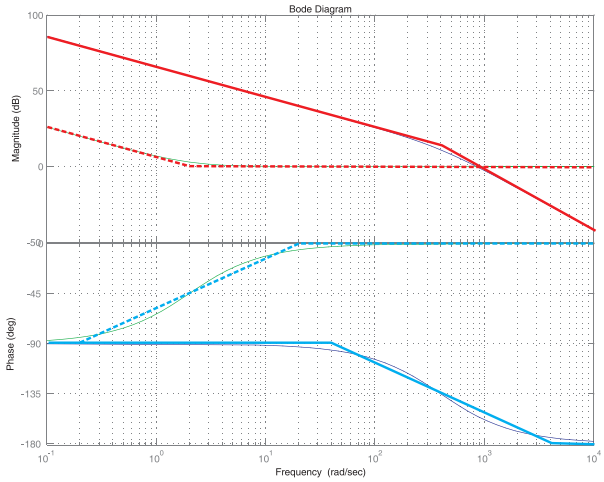

FIGURA 7. Gráficas de la Planta y del PI

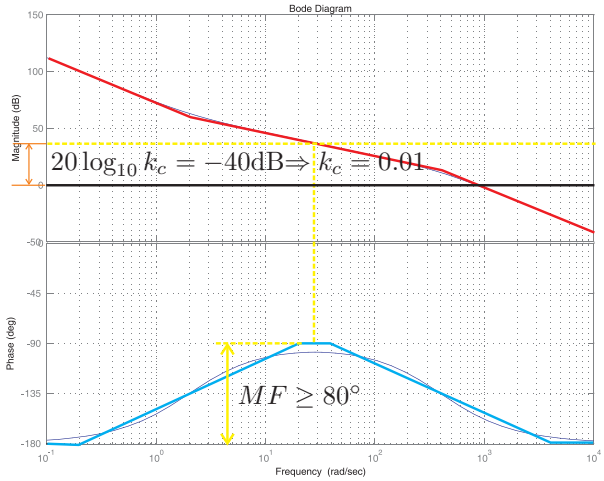

FIGURA 8. Planta compensada con $PI(s)/k_c$

Conforme se puede apreciar en la Figura 6 la planta $G_p(s)$ es estable en lazo cerrado, con margen de fase $MF \approx 30°$.
Colocando juntas en la misma gráfica las características del $PI(s)/k_c$ ubicado en $\omega_o = 2$ conforme Figura 7 se puede intuir el procedimiento de compensación. Conforme se sabe, al incorporar el compensador en el lazo, el módulo y fase del conjunto $PI(s)G_p(s)$ del punto de vista de las gráficas de bode, se compone como la suma de módulos y suma de fases, resultando en la Figura 8

La ganancia k_c del PI se calcula a partir de la traslación necesaria para llevar el nuevo punto de cruce del módulo, al punto donde se tiene el margen de fase

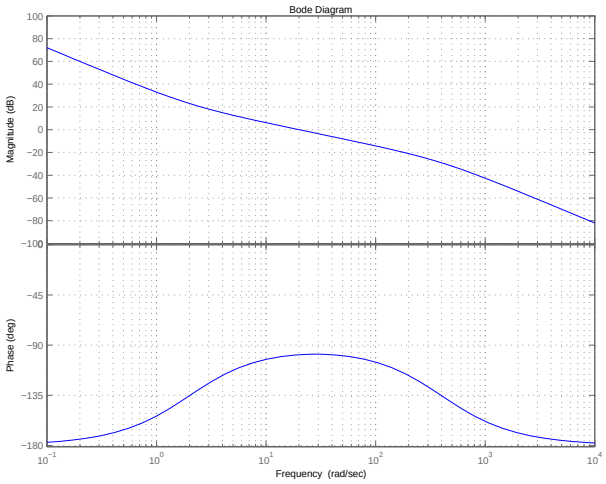

FIGURA 9. Aspecto final de la planta compensada

requerido. Esta traslación deberá bajar el módulo del conjunto un total de 40 dB, con lo que se calcula el valor de k_c

El PI obtenido es:

$$PI(s) = 0.01\frac{s/2+1}{s/2} = 0.01\frac{s+2}{s}$$

ETSII DE INGENIEROS INDUSTRIALES - VIGO
E-mail address: cesareo@uvigo.es