

LABORATORIO DE AUTOMÁTICA - MINAS

PRÁCTICA 3

1. DATOS DEL GRUPO

Fecha:	
Grupo:	
Nombre:	dni

2. GENERACIÓN DE DATOS

```
rand('state',dni);           % colocar uno de los dni's del grupo
Km = 10;                     % constante del motor CC
Ra = 1;                       % resistencia de armadura
Jm = 1;                       % momento de inercia del motor
JL = 10;                     % momento de inercia de la carga
BL = 1;                       % coeficiente de rozamiento en la carga
Bm = 5;                       % coeficiente de rozamiento en el motor
K = 500+200*rand;            % constante elástica del eje
E = ceil(5*rand);            % fuente de tensión
TL = 2+ceil(2*rand);          % torque en la carga
teta_R = pi/2 + pi*(rand-0.5)/3; % angulo de referencia en lazo cerrado
```

3. INTRODUCCIÓN AL SIMULINK

Un motor CC con constante K_m y momento de inercia del rotor J_m es controlado por armadura. El motor actúa a través de un eje elástico de constante elástica K sobre una carga con momento de inercia J_L y con rozamiento viscoso de coeficiente B_L . El ángulo de rotación del rotor se indica por θ_m y el de la carga por θ_L . Sobre la carga J_L actúa un par externo τ_L . Nos interesa describir la evolución de θ_L en función de E en un horizonte de simulación de $0 < t < 20[s]$.

Elabore el modelo en simulink del motor de CC presentado en la figura 1. Las ecuaciones asociadas a los diversos sub-sistemas son:

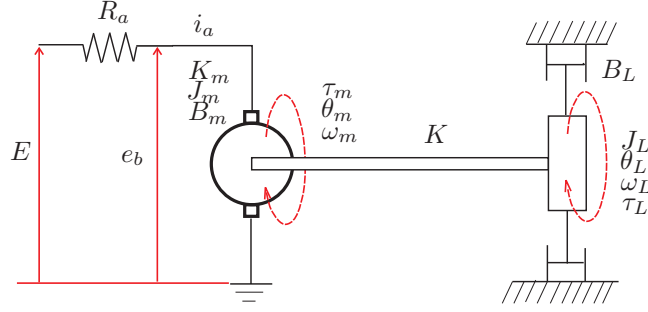


FIGURA 1. Diagrama de la Planta

$$E = R_a i_a + e_b \quad \text{Circuito eléctrico}$$

$$\begin{aligned} e_b &= K_m \omega_m \\ \tau_m &= K_m i_a \end{aligned} \quad \text{Motor CC}$$

$$(\omega = \dot{\theta})$$

$$\begin{aligned} J_m \dot{\omega}_m &= \tau_m - K(\theta_m - \theta_L) - B_m \omega_m \\ J_L \dot{\omega}_L &= \tau_L - B_L \omega_L - K(\theta_L - \theta_m) \end{aligned} \quad \text{Mecánica del motor y de la carga}$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m &= J_m \frac{d^2}{dt^2} + \left(B_m + \frac{K_m^2}{R_a} \right) \frac{d}{dt} + K \\ \mathcal{D}_L &= J_L \frac{d^2}{dt^2} + B_L \frac{d}{dt} + K \end{aligned}$$

tendremos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m \theta_m &= K \theta_L + \frac{K_m}{R_a} E \\ \mathcal{D}_L \theta_L &= K \theta_m + \tau_L \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_m & -K \\ K & -\mathcal{D}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_m \\ \theta_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_m}{R_a} E \\ -\tau_L \end{pmatrix}$$

resultando

$$\begin{aligned} \theta_L &= G_{LE}(s)E + G_{LL}(s)\tau_L \\ \theta_m &= G_{mE}(s)E + G_{mL}(s)\tau_L \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} G_{LE}(s) &= \frac{K K_m}{R_a} \frac{1}{\mathcal{D}_m \mathcal{D}_L - K^2} & G_{LL}(s) &= \frac{\mathcal{D}_m}{\mathcal{D}_m \mathcal{D}_L - K^2} \\ G_{mE}(s) &= \frac{K_m}{R_a} \frac{\mathcal{D}_L}{\mathcal{D}_m \mathcal{D}_L - K^2} & G_{mL}(s) &= \frac{K}{\mathcal{D}_m \mathcal{D}_L - K^2} \end{aligned}$$

(Las funciones de transferencia $G_i(s)$ se obtienen substituyendo en los operadores diferenciales, el operador $\frac{d}{dt}$ por s). El arreglo de simulación puede observarse en la figura 2

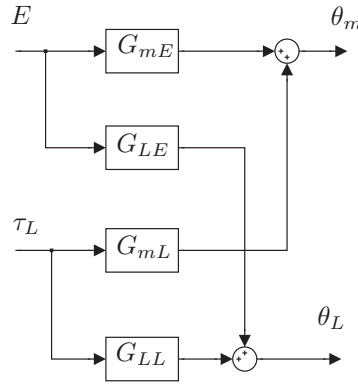


FIGURA 2. Arreglo de Simulación con Funciones de Transferencia

Utilizando ahora funciones de transferencia se pide:

1. En lazo abierto, aplicando E en $t = 0$ y τ_L en $t = 10$:
 - a) Comparar ω_m con ω_L .
 - b) Comparar θ_m con θ_L .
2. Cerrando el lazo con $E = K_p(\theta_R - \theta_L)$ (figura 3) se pide:
 - a) Verificar el seguimiento de la consigna θ_R por el ángulo en la carga θ_L , observando como la respuesta a escalón depende del valor de K_p , relacionando el valor de K_p con la sobreoscilación SO y con el tiempo de asentamiento t_a .
 - b) Determinar el rango de K_p , $0 < K_p \leq K_p^{crit}$, que permite una configuración de lazo cerrado, estable.
 - c) Haciendo $K_p = K_p^{crit}/2$
 - 1) ¿Cual el par máximo en el eje durante el transitorio provocado por un escalón unitario en θ_R ?
 - 2) ¿Cual el error en régimen permanente causado por τ_L aplicado en $t = 10$?
 - 3) ¿Cuales las raíces del denominador de la planta en lazo abierto?
 - 4) ¿Cuales las raíces del denominador de lazo cerrado?
 - 5) Determinar una aproximación de la planta en lazo abierto a través del par de polos dominante.
 - 6) Comparar la respuesta a escalón de la planta aproximada en lazo abierto y en lazo cerrado, con la planta exacta, comparando los valores de SO y t_a teóricos de las aproximaciones con los reales.

4. ÁLGEBRA DE POLINOMIOS

Los polinomios en `matlab` se representan a través de sus coeficientes. Así el polinomio

$$p = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x$$

en `matlab` se representa como

```
p = [1 3 -2 0 4 0]
```

El producto de dos polinomios se efectúa a través de la convolución de sus coeficientes

$$p_1 = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x, \quad p_2 = x^3 - 2x + 1, \quad p_1 \cdot p_2 = x^8 + 3x^7 - 4x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 4x$$

```
p1 = [1 3 -2 0 4 0]
```

```
p2 = [1 0 -2 1]
```

```
p = conv(p1,p2)
```

```
p = [1 3 -4 -5 11 -2 -8 4 0]
```

Las raíces de un polinomio se calculan con la función `roots`

```
roots(p1)
```

```
ans = 0
```

```
    -3.4798
```

```
    0.7399 + 0.7759i
```

```
    0.7399 - 0.7759i
```

```
   -1.0000
```

Así, la función de transferencia $G_{LE}(s)$ se representa a través de la fracción polinomial que tiene para numerador y denominador los polinomios

```
p1 = [Jm, Bm+Km^2/Ra, K];
```

```
p2 = [JL, BL, K];
```

```
num = [K*Km/Ra];
```

```
den = polisum(conv(p1,p2),-K^2);
```

definiendo previamente la función

```
function ps = polisum(p1,p2)
```

```
n1 = length(p1);
```

```
n2 = length(p2);
```

```
n0 = max(n1,n2);
```

```
pa = zeros(1,n0);
```

```
pb = zeros(1,n0);
```

```
pa(n0-n1+1:n0) = p1(1:n1);
```

```
pb(n0-n2+1:n0) = p2(1:n2);
```

```
ps = pa + pb;
```

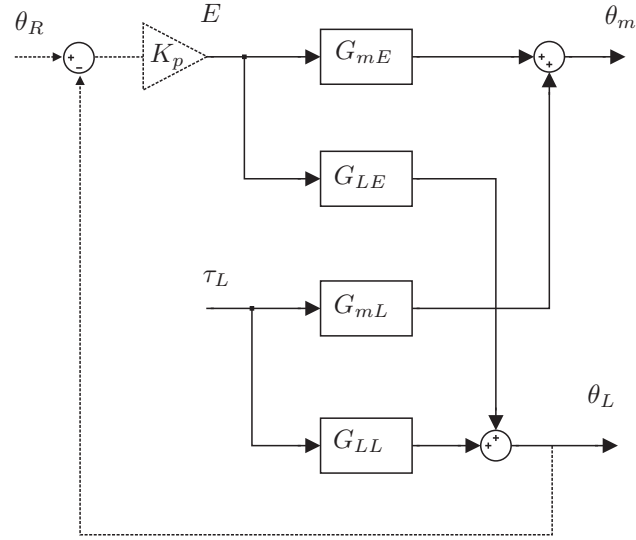


FIGURA 3. Arreglo del Lazo Cerrado

5. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA

Para el caso de la función de transferencia en lazo abierto ($G_{LE}(s)$) se considera el par de polos dominante que configura el binomio $(s + \alpha)^2 + \beta^2$. $G_{LE}(s)$ posee un polo en origen así pues deberá efectuarse lo que sigue:

$$G_{LE}(s) = \frac{K_{LE}}{s(s^3 + a_3s^2 + a_2s + a_1)} \approx \frac{K_o}{s[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$$

El cálculo de K_o se efectúa de acuerdo con

$$K_o = (\alpha^2 + \beta^2) \frac{K_{LE}}{a_1}$$

Para la función de transferencia de lazo cerrado tendremos:

$$G_{lc}(s) = \frac{K_p G_{LE}(s)}{1 + K_p G_{LE}(s)} = \frac{K_p N_{LE}(s)}{D_{LE}(s) + K_p N_{LE}(s)}, \quad G_{LE}(s) = \frac{N_{LE}(s)}{D_{LE}(s)}$$

los polos de lazo cerrado son por tanto, las raíces de $D_{LE}(s) + K_p N_{LE}(s) = 0$. La aproximación de lazo cerrado se efectúa como sigue:

$$G_{lc}(s) \approx \frac{K_{lc}}{[(s + \alpha_{lc})^2 + \beta_{lc}^2]}$$

donde $-\alpha_{lc} \pm j\beta_{lc}$ son los polos dominantes, y K_{lc} se calcula de acuerdo con

$$K_{lc} = (\alpha_{lc}^2 + \beta_{lc}^2) \frac{K_p N_{LE}(0)}{D_{LE}(0) + K_p N_{LE}(0)}$$