

TEORÍA DE SISTEMAS – PROBLEMAS IV

PROBLEMA 1

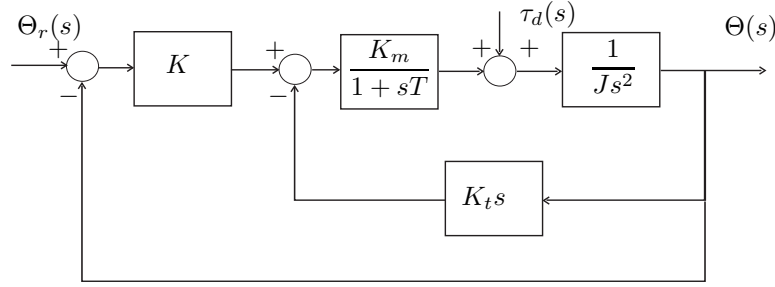


FIGURA 1. Lazo de regulación de un motor CC

El diagrama de la figura representa un diagrama de bloques de un sistema lineal controlado. Los parámetros fijos del sistema se dan como $T = 0.1$, $J = 0.01$, $K_m = 10$.

- a: Cuando $\theta_r(t) = \mathbf{1}(t)t$ y $\tau_d(t) = 0$, determine como los valores de K y K_t afectan al error en régimen permanente $e(t)$.
- b: Suponga que $\theta_r(t) = 0$. Determine como el valor de K afecta el valor en régimen permanente cuando $\tau_d(t) = \mathbf{1}(t)$.
- c: Suponiendo $K_t = 0.01$ estudie los valores de K que estabilizan el lazo cerrado.
- d: Calcular para que valor de K se tiene un par de raíces complejas conjugadas con parte real de -2.5 .

SOLUCIÓN

- a) El error de seguimiento de la referencia se calcula como

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(\Theta_r(s) - \Theta(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Theta_r(s)(1 - G(s))$$

donde la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$G(s) = \frac{K \frac{K_m}{1 + sT} \frac{1}{Js^2}}{1 + K \frac{K_m}{1 + sT} \frac{1}{Js^2} + \frac{K_m}{1 + Ts} \frac{1}{Js^2} K_t s} = \frac{KK_m}{(1 + Ts)Js^2 + KK_m + K_m K_t s}$$

siendo que

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \left(\frac{(1 + Ts)Js^2 + K_m K_t s}{(1 + Ts)Js^2 + KK_m + K_m K_t s} \right) = \frac{K_m K_t}{KK_m} = \frac{K_t}{K}$$

de donde se concluye que el error de seguimiento a rampa es limitado y está en la razón directa de K_t y en la inversa de K .

b) La función de transferencia entre $\tau_d(s)$ y $\Theta(s)$ viene dada por:

$$G_\tau(s) = \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + K \frac{K_m}{1+sT} \frac{1}{Js^2} + \frac{K_m}{1+Ts} \frac{1}{Js^2} K_t s} = \frac{(1+Ts)}{(1+Ts)Js^2 + KK_m + K_m K_t s}$$

y la respuesta angular a la perturbación $\tau_d(s)$ es:

$$\theta_\tau(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s G_\tau(s) \tau_d(s) = \frac{1}{KK_m}$$

c) La estabilidad de lazo cerrado está asociada a la ubicación de los polos de lazo cerrado, o sea, de las raíces del denominador de $G(s)$. Para tener estabilidad de lazo cerrado es necesario y suficiente que todas las raíces de

$$(1+Ts)Js^2 + KK_m + K_m K_t s = 0$$

estén ubicadas en el interior del semiplano complejo negativo. Expandiendo el polinomio se puede montar el arreglo de Routh.

$$\begin{array}{c|cc} 3 & TJ & K_m K_t \\ 2 & J & KK_m \\ \hline 1 & K_m(K_t - TK) & 0 \\ 0 & KK_m & 0 \end{array}$$

de donde salen las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad

$$TJ > 0, J > 0, K_m(K_t - TK) > 0, KK_m > 0$$

siendo $T > 0$, $J > 0$, $K_m > 0$ positivos, resta la condición en la ganancia del amplificador

$$0 < K < K_c = \frac{K_t}{T}$$

El mismo resultado se obtiene utilizando la técnica del Lugar de Raíces (LR). El denominador de la función de transferencia de lazo cerrado es:

$$(1+Ts)Js^2 + KK_m + K_m K_t s = JT s^3 + Js^2 + K_m K_t s + KK_m$$

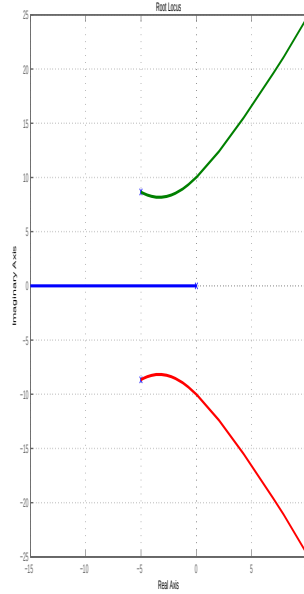
El LR se obtiene parametrizando las raíces del denominador por K . Para esto haremos el arreglo:

$$JT s^3 + Js^2 + K_m K_t s + KK_m = 0 \Rightarrow 1 + K \frac{K_m}{s(JTs^2 + Js + K_m K_t)} = 0$$

o aún

$$1 + K \frac{\left(\frac{K_m}{JT}\right)}{s \left(s^2 + \left(\frac{1}{T}\right)s + \left(\frac{K_m K_t}{JT}\right)\right)} = 0$$

por el exceso tenemos : $n - m = 3$ por tanto el LR tiene tres asíntotas. El centro de asíntotas está en $\eta = -\frac{1}{3T}$: (¿ Por que ?) El LR sale de los polos de lazo abierto y se dirige para los ceros propios o asíntóticos. La gráfica se obtiene fácilmente: (ver figura 2) El valor de K_c (K crítico) es el valor de K para el cual el LR cruza el eje

FIGURA 2. LR de $JTs^3 + Js^2 + K_m K_t s + K K_m = 0$

imaginario. Este valor se calcula fácilmente efectuando la substitución $s = j\omega$ y resolviendo la ecuación

$$JT(j\omega)^3 + J(j\omega)^2 + K_m K_t(j\omega) + K_c K_m = j(-JT\omega^3 + K_m K_t \omega) - J\omega^2 + K_c K_m = 0$$

de donde se concluye:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{K_m K_t}{JT} \\ \omega^2 &= \frac{K_c K_m}{J}\end{aligned}$$

de donde se obtiene $K_c = \frac{K_t}{T}$.

d) Ya que el polinomio estudiado es cúbico, se puede factorizar en la forma:

$$TJs^3 + Js^2 + K_m K_t s + K K_m = TJ(s + r) [(s + \alpha)^2 + \beta^2]$$

donde $\alpha = 2.5$. Efectuándose la expansión, por identidad de coeficientes se obtiene:

$$\begin{aligned}J &= TJ(2\alpha + r) \\ KK_t &= TJ(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha r) \\ KK_m &= TJ(\alpha^2 + \beta^2)r\end{aligned}$$

de donde se saca:

$$r = \frac{1}{T} - 2\alpha = 5, \quad K = \frac{r(K_m K_t - 2\alpha r T J)}{K_m} = 0.0375$$