

Problema 1

$$\frac{\theta_L}{E} = \frac{K K_m}{J_L J_m R_a s^4 + (B_L J_m R_a + J_L (K_m^2 + B_m R_a)) s^3 + ((J_L + J_m) K R_a + B_L (K_m^2 + B_m R_a)) s^2 + K (K_m^2 + (B_L + B_m) R_a) s}$$

substituyendo los valores paramétricos

$$G_p(s) = \frac{1000}{10200s + 1201s^2 + 1011s^3 + 10s^4}$$

en lazo cerrado

$$G_{lc}(p) = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)} = \frac{1000K_p}{1000K_p + s(10200 + 1201s + 1011s^2 + 10s^3)}$$

y el polinomio característico responsable por la estabilidad es:

$$1000K_p + 10200s + 1201s^2 + 1011s^3 + 10s^4$$

el arreglo de Routh queda

4	10	1201	1000K _p
3	1011	10200	0
2	c ₁	c ₂	
1	b ₁		

y calculando obtendremos

$$c_1 = 1100.11, \quad c_2 = 9.8912K_p, \quad b_1 = 10200 - 9.09K_p$$

de la condición $c_1 > 0$, $b_1 > 0$ sale que $0 < K_p < 1122.11$

Problema 2

De la gráfica de bode sacamos

$$G_p(s) = \frac{0.1}{s/10 + 1} = \frac{1}{s + 10}$$

de las relaciones

$$\begin{aligned} SO &= e^{-\pi \tan \theta} = 0.10 \\ t_a &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{20}{\cos \theta} \right) = 0.44 \end{aligned}$$

sacamos

$$\alpha = 7.29707, \quad \theta = 0.63249[\text{rad}]$$

y como $\beta = \alpha / \tan(\theta)$ sacamos que $\beta = 9.95595$ y por lo tanto

$$s_d = -7.29707 + 9.95595j$$

Para el aporte de fase

$$\angle G_c(s_d) = \pm\pi + \arctan\left(\frac{\beta}{10 - \alpha}\right) = -1.8359[\text{rad}] = -105.189^\circ$$

siendo negativo y teniendo que asegurar $e(\infty) = 0$ escogemos un PI con la estructura

$$G_c(s) = \text{PI}(s) = K_c \frac{s + z}{s}$$

Ahora resolveremos el problema de dos formas distintas pero equivalentes:

$$G_{lc}(s) = \frac{\text{PI}(s)G_p(s)}{1 + \text{PI}(s)G_p(s)} = \frac{s + z}{z} \frac{zK_c}{s^2 + (10 + K_c)s + zK_c}$$

para que se cumplan las especificaciones es necesario que

$$\frac{zK_c}{s^2 + (10 + K_c)s + zK_c} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

de donde sale:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= zK_c \\ 2\alpha &= 10 + K_c \end{aligned}$$

de donde se saca

$$PI(s) = 4.59414 \frac{s + 33.1658}{s}, \quad G_f(s) = \frac{33.1658}{s + 33.1658}$$

La segunda variante es la de ubicar el PI con el polo en el origen de coordenadas y el zero a un ángulo $\angle G_c(s_d)$ en el vértice definido por s_d , lo que sitúa z en el punto

$$z = \alpha - \beta \tan(\theta - \angle G_c(s_d))$$

El valor de K_c se obtiene utilizando la relación

$$|G_c(s_d)G_p(s_d)| = 1$$

La respuesta a escalón del sistema en lazo cerrado con el pre-filtro $G_f(s)$ se presenta en la Figura 1.

Problema 3

De la condición de equilibrio ($\dot{x} = \ddot{x} = 0$) se obtiene

$$x_0 = \frac{i_0 \sqrt{C}}{2\sqrt{mg}}$$

Las matrices A , B , C representantes de la linealización son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4g^{3/2}\sqrt{m}}{i_0\sqrt{C}} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{i_0} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} D & 0 \end{pmatrix}$$

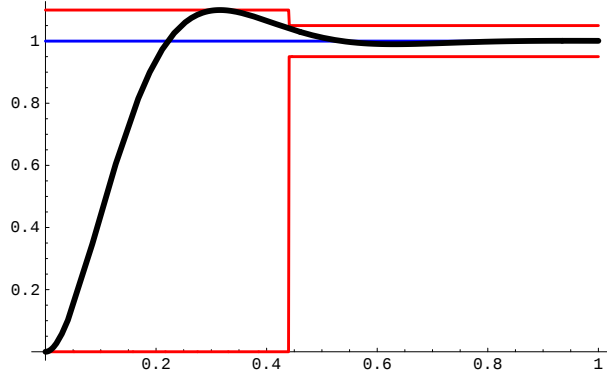


Figura 1: Respuesta a escalón en lazo cerrado (Problema 2)

y la función de transferencia

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{0.178885}{56.5685 - 0.0447214s^2}$$

Problema 4

Aplicando la ley de Newton

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t)$$

transformando Laplace

$$\frac{X(s)}{F(s)} = G_p(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

$$X(s) = G_p(s)F(s) = G_p(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)(s+3)s} = \frac{a}{s+3} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s}$$

de donde sacamos

$$\begin{aligned} 3c &= 1 \\ a + 3b + 4c &= 0 \\ a + b + c &= 0 \end{aligned}$$

y finalmente

$$x(t) = \frac{1}{6} (2 + e^{-3t} - 3e^{-t})$$

cuyo aspecto se puede observar en la figura 2

La respuesta de régimen permanente a la entrada sinusoidal se obtiene sabiendo que $\omega = 1$ y por lo tanto

$$G_p(j) = \frac{1}{-1 + 4j + 3} \rightarrow |G_p(j)| = 0.223607, \angle G_p(j) = -1.10715[\text{rad}]$$

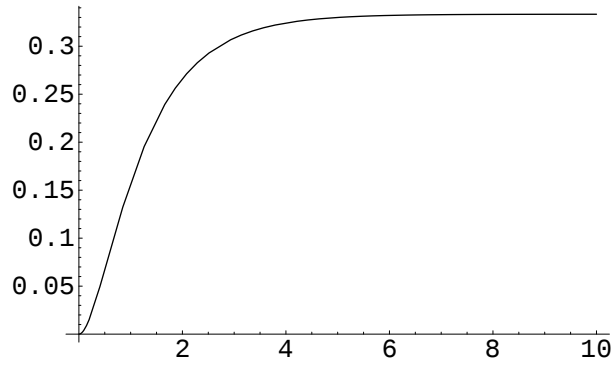


Figura 2: Respuesta de la planta a escalón (Problema 4)

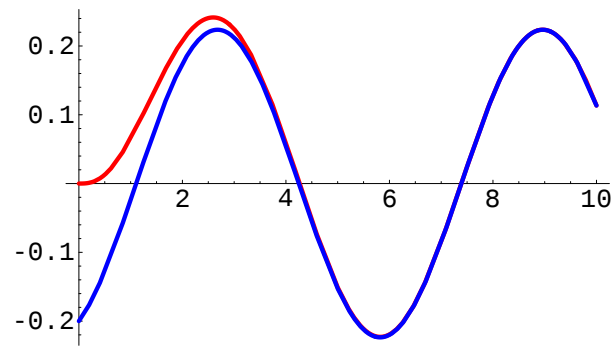


Figura 3: Comparación de $x(t)$ y $x_{rp}(t)$ para entrada sinusoidal (Problema 4)

y por ende

$$x_{rp}(t) = 0.223607 \sin(t - 1.10715)$$

En la figura 3 se observa la respuesta íntegra en rojo y la respuesta en régimen permanente en azul

Problema 5

Sigue una red de Petri posible.

