

OPTIMIZACIÓN EN $\mathbb{R}^\infty$ CÁLCULO DE VARIACIONES

CESÁREO RAIMÚNDEZ

1. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE VARIACIONES

Es bien conocido el echo enunciado por Arquímedes de que la distancia más corta entre dos puntos en el plano, se obtiene a través de la recta que los une. Intentemos demostrar esta aserción a partir de consideraciones cualitativas fundamentales. Consideremos la longitud de varios caminos descritos por funciones derivables $y(x)$ que unen los puntos A, B fijos en el plano. En estas condiciones l asume la forma

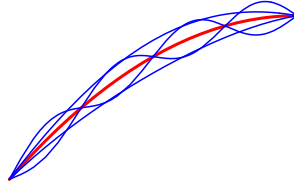


FIGURA 1. Variaciones

$$l = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

Conforme se puede observar $l = l(y(x))$ o sea, l es función de una función genérica $y(x)$. Las funciones de funciones se llaman *funcionales*.

El paso siguiente será el de minimizar l en relación a pequeñas variaciones en la función $y(x)$ asumida como solución, sometida a las restricciones establecidas en los puntos A y B . Deseamos pues que

$$\delta l = 0$$

para esto, calculamos el funcional con $y(x) \rightarrow y(x) + \delta y(x)$ donde $\delta y(x)$ es una variación que cumple las condiciones $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. La función $y(x)$ para la cual se cumple $\delta l = 0$ para pequeñas variaciones $\delta y(x)$ es la solución del problema de extremos. En el caso de la mínima distancia el problema será de mínimo.

Consideremos ahora el funcional con la forma

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx$$

donde los puntos de la solución son fijos ($y(a) = y_a, y(b) = y_b$). Efectuando el desarrollo de la variación como consecuencia de considerar $y(x) \rightarrow y(x) + \delta y(x)$ tendremos

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx$$

donde $\delta y' = d(\delta y)/dx$. Considerando nula la variación de lo que sería supuestamente un punto extremo, tendremos:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0$$

pero

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y$$

que substituyendo en el integrando resulta en

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0$$

pero $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ entonces resulta

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0$$

que debe ser verdadera para cualquier δy lo que implica en

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Esta condición es conocida como ecuación de *Euler-Lagrange*.

1.1. Casos especiales. Supongamos inicialmente que F no depende explícitamente de y . En este caso tendremos que $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ de donde se concluye que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = C = \text{constante}$$

Supongamos ahora que F no depende explícitamente de x . Multiplicando la ecuación de Euler-Lagrange por y' obtendremos

$$y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

pero sabemos que

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$$

así se obtiene

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$$

Ahora si $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ entonces

$$\frac{dF}{dx} = y' \frac{\partial F}{\partial y} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'}$$

por donde se concluye que en estas condiciones

$$\frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{dF}{dx}$$

lo que conlleva a

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = C = \text{constante}$$

Volviendo ahora al problema inicial de determinar el camino más corto entre dos puntos en el plano, se tiene que $F = \sqrt{1+y'^2}$ que conforme se puede observar no depende explícitamente de y lo que conlleva a

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

de donde se concluye que

$$y' = \frac{C}{\sqrt{1+C^2}} = \text{constante}$$

que es la ecuación de una recta.

1.2. Ejercicio. Problema de la Braquistócrona. En 1696 Johann Bernoulli propuso el problema: Dados dos puntos A y B en un plano vertical, cual es la trayectoria que debe seguir un punto material bajo la influencia de la gravedad para llegar de A a B en un tiempo mínimo?

1.3. Solución. El movimiento de una partícula de masa m deslizando sin rozamiento obedece a la ecuación de energía

$$\frac{1}{2}mv^2 = ymg \Rightarrow v = \sqrt{2yg}$$

el elemento de arco del camino seguido por la partícula es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+y'^2}dx$$

El incremento de tiempo será

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{1}{2g} \frac{\sqrt{1+y'^2}dx}{\sqrt{y}}$$

y el tiempo consumido será

$$T = \frac{1}{2g} \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

Observando el funcional se nota que $F = F(y, y')$ o sea que F no depende explícitamente de x entonces vale

$$y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = C = \text{constante}$$

o sea

$$y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} \right) - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} = C$$

resolviendo esta ecuación para y' obtendremos

$$y' = \sqrt{\frac{1-C^2y}{C^2y}}$$

para resolver la ecuación diferencial resultante se efectúa la substitución $C^2y = \sin^2 \theta$ y también $dy = \frac{2}{C^2} \sin \theta \cos \theta d\theta$ llegamos a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{C^2} \sin \theta \cos \theta \frac{d\theta}{dx} = \cot \theta$$

resultando en la ecuación diferencial con variables separadas

$$\frac{C^2}{2}dx = \sin^2 \theta d\theta$$

cuya solución es

$$\frac{C^2}{2}x = \frac{1}{4}(2\theta - \sin(2\theta)) + C_1$$

pero

$$y = \frac{1}{C^2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2C^2}(1 - \cos(2\theta))$$

y finalmente

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2C^2}(2\theta - \sin(2\theta)) + x_0 \\ y &= \frac{1}{2C^2}(1 - \cos(2\theta)) \end{aligned}$$

haciendo $u_0 = 1/(2C^2)$, $v = 2\theta$ tendremos

$$\begin{aligned} x &= u_0(v - \sin v) + x_0 \\ y &= u_0(1 - \cos v) \end{aligned}$$

que es la ecuación paramétrica de una cicloide.

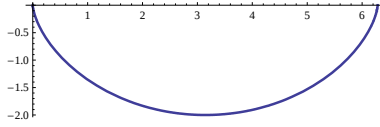


FIGURA 2. Cicloide para $u_0 = 1$, $x_0 = 0$

1.4. Ejemplo. Determinemos la trayectoria de una partícula que debe salir del origen de coordenadas hasta alcanzar la línea vertical que pasa por la abscisa $x = b$ en tiempo mínimo. En este caso el punto inicial $x = a = 0$, $y = 0$ es fijo pero el punto final en $x = b$ tiene la ordenada libre. Para tratar esta situación deberemos considerar de nuevo la ecuación de variación

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_a^b = 0$$

siendo que ahora $\delta y(a) = 0$ pero $\delta y(b)$ es libre. En este caso surge la condición adicional incorporando la restricción en el punto $x = b$ obteniéndose

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(b) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}(y(b), y'(b), b) = 0$$

o sea

$$\frac{y'(b)}{\sqrt{y(b)}\sqrt{1+y'^2(b)}} = 0 \Rightarrow y'(b) = 0$$

lo que indica que la trayectoria llega al punto de ordenada $x = b$ en la dirección horizontal por tanto

$$y' = \frac{d}{du}(v_0(1 - \cos u)) = v_0 \sin u = 0 \Rightarrow u = \pi$$

y entonces

$$b = x(\pi) = v_0(\pi - \sin \pi) + x_0 = v_0\pi \Rightarrow v_0 = \frac{\pi}{2b} \Rightarrow y(\pi) = v_0(1 - \cos \pi) = \frac{2b}{\pi}$$

2. PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN DE HAMILTON

Consideremos un sistema de partículas con restricciones geométricas entre sí y sometidas a fuerzas dependientes apenas del punto en que se encuentra cada partícula y de carácter conservativo o sea, que las fuerzas puedan describirse como el gradiente de una función de energía potencial $V(q)$ del sistema. Sean los grados de libertad del sistema indicados por

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

La energía cinética del sistema vendrá dada por

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

la lagrangiana del sistema será entonces

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q)$$

El principio fundamental de Hamilton entonces se enuncia: El movimiento del un sistema con la lagrangiana L es tal que sus órbitas hacen mínima la integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

y las ecuaciones del movimiento se obtienen de la condición de punto estacionario (ecuaciones de Euler-Lagrange) en la integral de la mínima acción o sea

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Si se aplican fuerzas externas, las ecuaciones de Euler-Lagrange asumen la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = f_q$$

donde f_q es la fuerza generalizada asociada a la variable de configuración q . Para la Lagrangiana considerada tendremos las ecuaciones del movimiento:

$$M\ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^T \frac{dM}{dt} \dot{q} + \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial V}{\partial q} = f_q$$

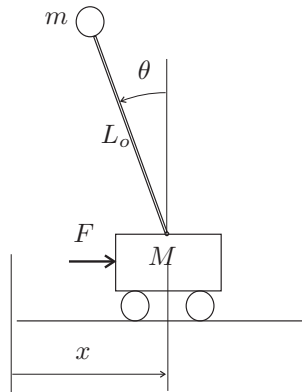


FIGURA 3. Péndulo invertido

2.1. Ejemplo - Péndulo Invertido. Para el péndulo conforme figura tenemos:

$$L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_m \\ v_M \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_m \\ v_M \end{bmatrix} - mgL_o \cos \theta$$

donde v_m indica la velocidad de la masa m y v_M la relativa a la masa M . Las expresiones para v_m y v_M siguen

$$\begin{aligned} v_M &= (\dot{x}, 0)^T \\ v_m &= v_M - L_o \dot{\theta} (\cos \theta, \sin \theta)^T \end{aligned}$$

que pueden arreglarse de la forma

$$L(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} M + m & -mL_o \cos \theta \\ mL_o \cos \theta & mL_o^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} - mgL_o \cos \theta$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{x} - mL_o \cos \theta \ddot{\theta} + mL_o \sin \theta \dot{\theta}^2 &= F \\ -mL_o \cos \theta \ddot{x} + mL_o^2 \ddot{\theta} - mgL_o \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

que aún pueden colocarse en la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{2F + mg \sin(2\theta) - 2mL_o \sin \theta \dot{\theta}^2}{2M + m(1 - \cos(2\theta))} \\ \ddot{\theta} &= \frac{2F \cos \theta + 2(M + m)g \sin \theta - mL_o \sin(2\theta) \dot{\theta}^2}{2M + m(1 - \cos(2\theta))} \end{aligned}$$

3. VARIACIÓN CON RESTRICCIONES - MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sea el caso de determinar el movimiento de un sistema dinámico con Lagrangiana dada por

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} - V(q)$$

restringido a evolucionar sobre una superficie $S(q) = 0$. En este caso la acción a minimizar queda

$$I = \int_0^t (L(q, \dot{q}) + \lambda S(q)) dt$$

Las ecuaciones de variación originan la ecuación de Euler Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \lambda \frac{\partial S}{\partial q} &= f_q \\ S(q) &= 0 \end{aligned}$$

El sentido de $\lambda \frac{\partial S}{\partial q}$ es el de la fuerza necesaria para mantener la órbita sobre la superficie.

3.1. Ejemplo. Sea el punto material de masa m sometido a la fuerza gravitatoria con movimiento deslizando sin rozamiento, sobre la superficie $S = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z = 0$. La Lagrangiana extendida queda

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - z \right)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \lambda x &= 0 \\ m\ddot{y} - \lambda y &= 0 \\ m\ddot{z} + \lambda &= mg \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) &= z \end{aligned}$$

resolviendo para $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \lambda)$ queda

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x \left(\frac{g - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}{1 + x^2 + y^2} \right) \\ \ddot{y} &= y \left(\frac{g - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}{1 + x^2 + y^2} \right) \\ \ddot{z} &= \frac{g(x^2 + y^2) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}{1 + x^2 + y^2} \\ \lambda &= m \left(\frac{g - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}{1 + x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

obtenemos las órbitas de un oscilador y también

$$f_S = m \left(\frac{g - \dot{x}^2 - \dot{y}^2}{1 + x^2 + y^2} \right) (x, y, -1)^T$$

la fuerza necesaria para mantener la partícula sobre la superficie S .

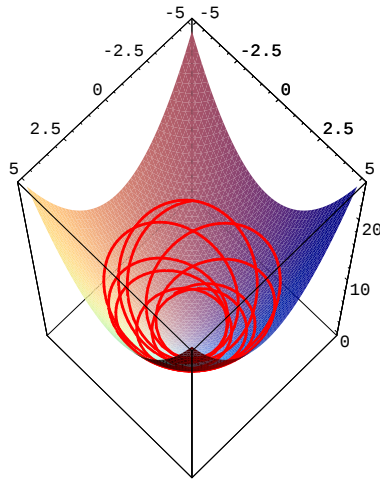


FIGURA 4. Órbitas del punto material

Añadiéndose rozamiento viscoso tendremos

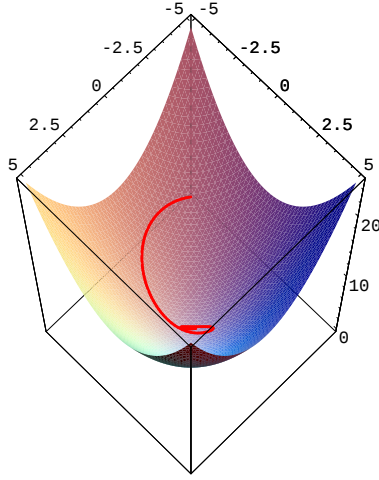


FIGURA 5. Órbitas del punto material con rozamiento

4. INTRODUCCIÓN AL CONTROL ÓPTIMO

La teoría del Control Óptimo guarda un parentesco muy fuerte con el Cálculo de Variaciones. De hecho se puede considerar como una prolongación de éste último al estudio de los sistemas dinámicos con índice de desempeño. La formulación típica de un problema de control óptimo podría ser así:

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} I &= \int_{t_i}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \\ \text{sujeto a } &\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_i) = x_i \end{cases} \end{aligned}$$

A través de esta formulación se busca $u(t)$ que dentro de la dinámica impuesta, produzca el valor mínimo de un determinado desempeño cuya medida viene dada por I . La equivalencia del lado del Cálculo de Variaciones es evidente ya que un problema típico de éste último, puede formularse como problema de Control Óptimo o sea

$$\min_x I = \int_{t_i}^{t_f} L(x, \dot{x}, t) dt \Rightarrow \begin{cases} \min_u I = \int_{t_i}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \\ \text{sujeto a } \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t) \\ x(t_i) = x_i \end{cases} \end{cases}$$

La recíproca de modo general no vale salvo en algunos casos particulares. La condición necesaria para la equivalencia en dirección contraria es que se pueda obtener

$$u(t) = f^{-1}(x(t), \dot{x}(t), t)$$

lo que no siempre es posible. Así, la familia de problemas de Control Óptimo es más numerosa que la familia de problemas de Cálculo de Variaciones.

4.1. Nota Importante. Los problemas de CO, de modo general, poseen condiciones iniciales fijas ($x(t_i) = x_i$) pero condiciones finales (sobre $x(t_f)$) libres.

4.2. Principio del Maximum de Pontriaguin. La forma de tratar los problemas con restricciones en el CV nos sugiere un procedimiento equivalente para el caso del CO con la adopción de los multiplicadores de Lagrange. Siendo la restricción ahora dinámica, adoptaremos una función multiplicativa $\lambda(t)$ formando en seguida el Hamiltoniano H .

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t)f(x(t), u(t), t)$$

El hamiltoniano surge de la propuesta lagrangiana resultando de:

$$\int_{t_i}^{t_f} (L(x, u, t) + \lambda^T(f(x, u, t) - \dot{x})) dt = \int_{t_i}^{t_f} (L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) + \dot{\lambda}x) dt - \lambda(t_f)x(t_f) + \lambda(t_i)x(t_i)$$

o de forma más compacta

$$I = \int_{t_i}^{t_f} (H(x, u, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T x) dt - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_i)x(t_i)$$

efectuando la variación de I tendremos

$$\delta I = \int_{t_i}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}^T \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \delta \lambda \right\} dt - \lambda(t_f) \delta x(t_f) + \lambda(t_i) \delta x(t_i) = 0$$

de donde sacamos las condiciones de punto estacionario

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ -\frac{\partial H}{\partial x} &= \dot{\lambda}^T \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{x} \end{aligned}$$

estas condiciones necesarias son conocidas como *Principio del Maximum de Pontriaguin*. Si la actuación u sufre restricciones la formulación deberá cambiarse para la más general

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} &= H(x, u, \lambda, t) \\ -\frac{\partial H}{\partial x} &= \dot{\lambda}^T \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{x} \end{aligned}$$

4.3. Algoritmo. El procedimiento para resolver un problema de CO es el siguiente:

1. Minimizar el Hamiltoniano con respecto a u obteniendo la expresión de u en función de x, λ .

$$\min_{u \in U} = H(x, u, \lambda, t) \Rightarrow u^*(x, \lambda, t)$$

2. Substituir u por su valor u^* en el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de modo que permanezcan dos variables por resolver: (x, λ) .

En la solución de las ecuaciones deben utilizarse las condiciones iniciales y terminales.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, u^*(x, \lambda, t), \lambda) \\ \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, u^*(x, \lambda, t), \lambda) \\ x(t_i) = x_i \\ \lambda(t_f) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{array} \right.$$

3. Con los valores óptimos x^*, λ^* volver al paso 1 para obtener los valores óptimos de los controles

$$u^*(t) = u^*(x^*, \lambda^*, t)$$

Debe notarse que las condiciones ahora son iniciales en $x(t_i) = x_i$ y finales en $\lambda(t_f) = 0$, esta última debido a que la condición final en x es libre. En casos como este las condiciones se llaman *transversales*.

4.4. Ejemplo 1. Sea el problema

$$\begin{array}{ll} \max_u I &= \int_0^1 (x + u) dt \\ \text{sujeto a} &\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 1 - u^2 \\ x(0) = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

El hamiltoniano queda

$$H(x, u, \lambda) = x + u + \lambda(1 - u^2)$$

Las condiciones de optimalidad nos proporcionan

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= 1 - 2\lambda u = 0 \\ -\frac{\partial H}{\partial x} &= \dot{\lambda} = -1 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{x} = 1 + u^2 \end{aligned}$$

con las condiciones $\lambda(1) = 0$, $x(0) = 1$. Para tener un máximo en u deberemos cumplir la condición

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda(t) \geq 0$$

resolviendo llegamos a

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - t \\ x &= t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4} \\ u &= \frac{1}{2(1-t)} \end{aligned}$$

4.5. Ejemplo 2. Sea el problema

$$\begin{aligned} \min_u I &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}(x^2 + \dot{x}^2 + \rho^2 u^2) dt \\ \text{sujeto a } &\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} = u \\ x(t_i) = x_i \\ \dot{x}(t_i) = \dot{x}_i \\ x(t_f) = 0 \\ \dot{x}(t_f) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

el primer paso a efectuar es el de normalizar a representación, introduciendo las variables $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}_1$ con esto el problema se formulará de acuerdo con

$$\begin{aligned} \min_u I &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \rho^2 u^2) dt \\ \text{sujeto a } &\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ x_1(t_i) = x_i^1 \\ x_2(t_i) = x_i^2 \\ x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

El hamiltoniano será

$$H(x, \lambda, u) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \rho^2 u^2) + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 + u \end{pmatrix}$$

de la condición

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \rho^2 u + \lambda_2 = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{\lambda_2}{\rho^2}$$

de la condición

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\lambda} = \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -x_1 \\ \dot{\lambda}_2 = -x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

de la condición

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \frac{\lambda_2}{\rho^2} \end{cases}$$

La resolución del sistema resultante

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -x_1 \\ \dot{\lambda}_2 &= -x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \frac{\lambda_2}{\rho^2} \end{aligned}$$

nos proporciona

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{e^{-\frac{t(\rho+1)}{\rho}} \left(-e^{t\left(2+\frac{1}{\rho}\right)} (c_1 - c_3 + c_4) - e^{t/\rho} (2c_2\rho^2 + c_1 + c_3 + c_4) + e^{\frac{2t}{\rho}+t} ((c_1+c_2)\rho^2 - (c_2+c_3)\rho + c_4) + e^t (\rho(c_2 + \rho(c_1+c_2) + c_3) + c_4) \right)}{2(\rho^2-1)} \\
x_2(t) &= \frac{e^{-\frac{t(\rho+1)}{\rho}} \left(-e^{t\left(2+\frac{1}{\rho}\right)} \rho(c_1 - c_3 + c_4) + e^{t/\rho} \rho(2c_2\rho^2 + c_1 + c_3 + c_4) + e^{\frac{2t}{\rho}+t} ((c_1+c_2)\rho^2 - (c_2+c_3)\rho + c_4) - e^t (\rho(c_2 + \rho(c_1+c_2) + c_3) + c_4) \right)}{2\rho(\rho^2-1)} \\
\lambda_1(t) &= \frac{e^{-\frac{t(\rho+1)}{\rho}} \left(e^{t\left(2+\frac{1}{\rho}\right)} (c_1 - c_3 + c_4) - e^{t/\rho} (2c_2\rho^2 + c_1 + c_3 + c_4) - e^{\frac{2t}{\rho}+t} \rho((c_1+c_2)\rho^2 - (c_2+c_3)\rho + c_4) + e^t \rho(\rho(c_2 + \rho(c_1+c_2) + c_3) + c_4) \right)}{2(\rho^2-1)} \\
\lambda_2(t) &= \frac{e^{-\frac{t}{\rho}} \left(2e^{\frac{t}{\rho}+t} (c_1 - c_3 + c_4)\rho^2 - e^{\frac{2t}{\rho}} (\rho+1)((c_1+c_2)\rho^2 - (c_2+c_3)\rho + c_4) + (\rho-1)(\rho(c_2 + \rho(c_1+c_2) + c_3) + c_4) \right)}{2(\rho^2-1)}
\end{aligned}$$

Las constantes c_1, c_2, c_3, c_4 se determinan en función de las condiciones de contorno. Para valores típicos $\rho = 0.5, t_f = 2, x_1(0) = 2, x_2(0) = -1, x_1(t_f) = 0, x_2(t_f) = 0$ tendremos la solución de acuerdo con las gráficas que siguen

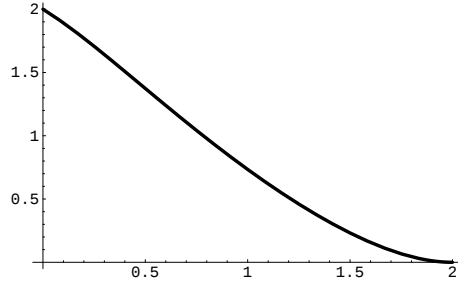


FIGURA 6. $x_1(t)$ óptimo

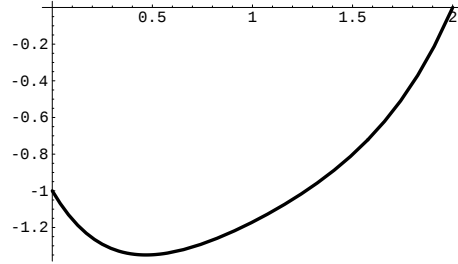
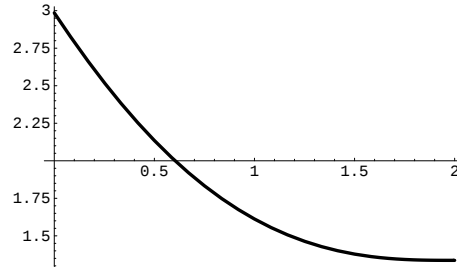
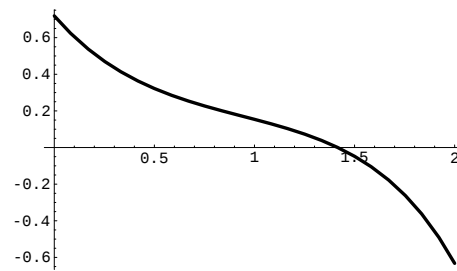


FIGURA 7. $x_2(t)$ óptimo

FIGURA 8. $\lambda_1(t)$ óptimoFIGURA 9. $\lambda_2(t)$ óptimo

4.6. Ejemplo 3 - Condiciones de Contorno. Sea el problema de maximizar la cantidad final del producto y durante una reacción química en que $x \rightarrow y$. Asumiendo cinética de primer orden para las tasas de variación en x e y tendremos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -a(t)x \\ \dot{y} &= a(t)x - b(t)y\end{aligned}$$

donde

$$b(t) = \rho a^k(t)$$

con ρ, k constantes positivas. El factor de control es $a(t)$ y se desea minimizar $-y(t_f)$. Las condiciones iniciales y finales para el problema son:

$$\begin{aligned}t_i &= 0 \\ t_f &= t_f^o \\ x(t_i) &= x_o \\ y(t_i) &= y_o\end{aligned}$$

El hamiltoniano resulta

$$H = -\lambda_1 a(t)x(t) + \lambda_2 (a(t)x(t) - b(t)y(t))$$

siendo que debe determinarse el mínimo de

$$-y(t_f) + \int_{t_i}^{t_f} H dt + \lambda_1(t_f)x(t_f) - \lambda_1(t_i)x(t_i) + \lambda_2(t_f)y(t_f) - \lambda_2(t_i)y(t_i)$$

de las condiciones de punto estacionario retiramos

$$\frac{\partial H}{\partial a} = 0 \Rightarrow a^* = \left[\frac{x}{\rho k y} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2} \right) \right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Para obtener un máximo debe observarse

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = -\rho k(k-1)a^{k-2}\lambda_2 y \leq 0$$

de las ecuaciones del movimiento se saca que

$$\lambda_2(t) = e^{-\int_{t_i}^{t_f} b dt} > 0$$

al par que y es positiva por definición. Para que el control maximice debe observarse que $k > 1$. De las condiciones de transversalidad sacamos

$$-\delta y(t_f) + \lambda_1(t_f)\delta x(t_f) + \lambda_2(t_f)\delta y(t_f) = 0$$

sacamos

$$\begin{aligned} \lambda_1(t_f) &= 0 \\ \lambda_2(t_f) &= 1 \end{aligned}$$

pues las variaciones de $\delta x(t_f)$ y $\delta y(t_f)$ son independientes. El sistema de ecuaciones que describe la dinámica es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \left(\frac{x_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{k\rho x_2 \lambda_2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \\ \dot{x}_2 &= x_1 \left(\frac{x_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{k\rho x_2 \lambda_2} \right)^{\frac{1}{k-1}} - \rho x_2 \left(\frac{x_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{k\rho x_2 \lambda_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \dot{\lambda}_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2) \left(\frac{x_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{k\rho x_2 \lambda_2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \\ \dot{\lambda}_2 &= \rho \lambda_2 \left(\frac{x_1(\lambda_2 - \lambda_1)}{k\rho x_2 \lambda_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \end{aligned}$$

donde $x_1 = x$, $x_2 = y$. Este sistema de ecuaciones debe resolverse para las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} x_1(t_i) &= x_o \\ x_2(t_i) &= y_o \\ \lambda_1(t_f) &= 0 \\ \lambda_2(t_f) &= 1 \end{aligned}$$

lo que ya no podrá hacerse como en el ejemplo anterior, debido a la imposibilidad de determinar soluciones en forma cerrada para x_1 , x_2 , λ_1 , λ_2 . Buscaremos la solución iterativamente siguiendo los pasos:

1. Llamemos

$$\begin{aligned} \lambda_{1_i} &= \lambda_1(t_i) \\ \lambda_{2_i} &= \lambda_2(t_i) \\ \lambda_{1_f} &= \lambda_1(t_f) \\ \lambda_{2_f} &= \lambda_2(t_f) \end{aligned}$$

entonces puede escribirse

$$\begin{aligned} \delta \lambda_{1_f} &= \left(\frac{\partial \lambda_{1_f}}{\partial \lambda_{1_i}} \right) \delta \lambda_{1_i} + \left(\frac{\partial \lambda_{1_f}}{\partial \lambda_{2_i}} \right) \delta \lambda_{2_i} \\ \delta \lambda_{2_f} &= \left(\frac{\partial \lambda_{2_f}}{\partial \lambda_{1_i}} \right) \delta \lambda_{1_i} + \left(\frac{\partial \lambda_{2_f}}{\partial \lambda_{2_i}} \right) \delta \lambda_{2_i} \end{aligned}$$

donde $\delta\lambda = \lambda^j - \lambda^{j-1}$ así por ejemplo, $\delta\lambda_{1_f} = \lambda_{1_f}^1 - 0$ y $\delta\lambda_{2_f} = \lambda_{2_f}^1 - 1$ de donde sacamos $\lambda_{1_f}^1 = 0 + \delta\lambda_{1_f}$ y $\lambda_{2_f}^1 = \delta\lambda_{2_f} + 1$.

2. Suponiendo conocidos los coeficientes $\frac{\partial\lambda_{\{1,2\}_f}}{\partial\lambda_{\{1,2\}_i}}$ y teniendo los valores de $\delta\lambda_{1_f}$ y $\delta\lambda_{2_f}$ se puede resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1_i} \\ \lambda_{1_2} \end{pmatrix}_{j+1} = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_{1_f}}{\partial\lambda_{1_i}} \\ \frac{\partial\lambda_{2_f}}{\partial\lambda_{1_i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda_{1_f}}{\partial\lambda_{2_i}} \\ \frac{\partial\lambda_{2_f}}{\partial\lambda_{2_i}} \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_{1_f} \\ \lambda_{2_f} \end{pmatrix}_j$$

3. Cálculo de $\frac{\partial\lambda_{\{1,2\}_f}}{\partial\lambda_{\{1,2\}_i}}$. Para calcular $\frac{\partial\lambda_{1_f}}{\partial\lambda_{2_i}}$ por ejemplo, se considera $\lambda_{1_i} = C^{te}$ y dos intentos sucesivos de λ_{2_i} después de la integración de las ecuaciones de la dinámica, generan sendos valores para $\lambda_{\{1,2\}_f}$ cuando podremos calcular entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial\lambda_{1_f}}{\partial\lambda_{2_i}} &\approx \frac{\Delta\lambda_{1_f}}{\Delta\lambda_{2_i}} \\ \frac{\partial\lambda_{2_f}}{\partial\lambda_{2_i}} &\approx \frac{\Delta\lambda_{2_f}}{\Delta\lambda_{2_i}} \end{aligned}$$

procedimiento análogo se efectúa para $\lambda_{2_i} = C^{te}$.

4. Colocar el procedimiento en un lazo iterativo, hasta que se cumpla una condición de proximidad

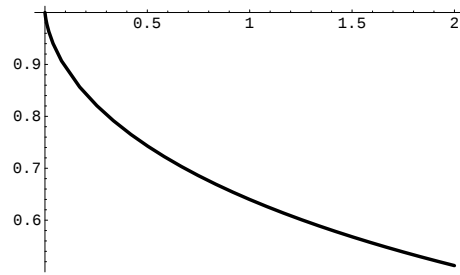
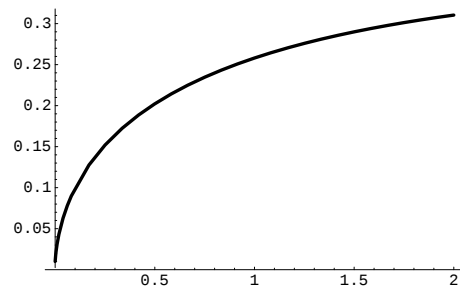
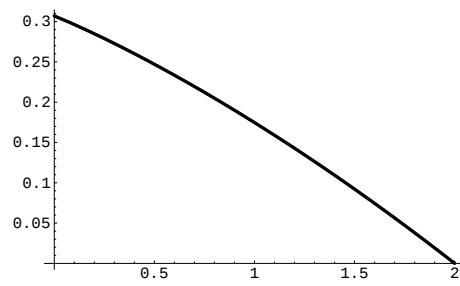
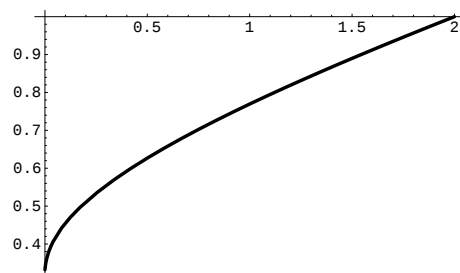
5. PROCEDIMIENTO EN MATHEMATICA PARA MANEJAR LAS CONDICIONES
DE CONTORNO

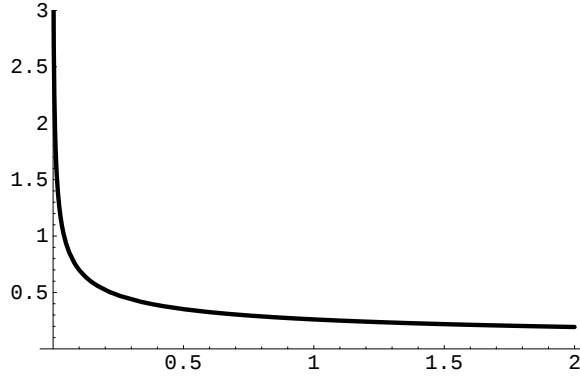
```

X = {x1, x2};
L = {λ1, λ2};
cinit = {x1[0]==x10, x2[0]==x20};
cinitdum = {λ1[0]==λ1dum, λ2[0]==λ2dum};
varstot = Join[X, L];
cinitstot = Join[cinit, cinitdum];
tf = 2;
tmax = tf;
pars = {ρ → 2.5, k → 1.5, x10 → 1, x20 → 0.01};
For[{i = 0;
  λ10 = {0.05, 0.2}; λatu = λ10;
  λf = {λ1[tf], λ2[tf]}; λf0 = {0, 1},
  Δλ = {0.0001, 0.0001}},
  i < 10,
  {
    λ1dum = λatu[[1]];
    λ2dum = λatu[[2]];
    solsmov0 = NDSolve[Join[equs, cinitstot]/.pars, varstot, {t, 0, tmax}];
    λ1dum = λatu[[1]] + Δλ[[1]];
    λ2dum = λatu[[2]];
    solsmov1 = NDSolve[Join[equs, cinitstot]/.pars, varstot, {t, 0, tmax}];
    λ1dum = λatu[[1]];
    λ2dum = λatu[[2]] + Δλ[[2]];
    solsmov2 = NDSolve[Join[equs, cinitstot]/.pars, varstot, {t, 0, tmax}];
    λf1 = Evaluate[λf/.solsmov1][[1]];
    λf2 = Evaluate[λf/.solsmov2][[1]];
    λf0 = Evaluate[λf/.solsmov0][[1]];
    Δf = λf0 - λf0;
    Δλf11 = (λf1[[1]] - λf0[[1]])/Δλ[[1]];
    Δλf12 = (λf2[[1]] - λf0[[1]])/Δλ[[2]];
    Δλf21 = (λf1[[2]] - λf0[[2]])/Δλ[[1]];
    Δλf22 = (λf2[[2]] - λf0[[2]])/Δλ[[2]];
    DD = {{Δλf11, Δλf12}, {Δλf21, Δλf22}};
    Δλi = Inverse[DD].Δf;
    λatu = λatu + Δλi; i++]
```

Las gráficas que siguen ilustran la solución para los datos

$$\{\rho = 2.5, k = 1.5, x(0) = 1, y(0) = 0.01\}$$

FIGURA 10. $x(t)$ óptimoFIGURA 11. $y(t)$ óptimoFIGURA 12. $\lambda_1(t)$ óptimoFIGURA 13. $\lambda_2(t)$ óptimo

FIGURA 14. $u(t)$ óptimo

6. SOLUCIONES DE TIEMPO MÍNIMO

Para los problemas de tiempo mínimo la solución se obtiene considerando que

$$H = 1 \Rightarrow I = t_f - t_i$$

El problema resultante es un problema de ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, t) & x(t_i) \text{ fijado como condición inicial} \\ \dot{\lambda} &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda & x_j(t_f) \text{ especificados para } j = 1, \dots, n_j \\ \lambda_j(t_f) &= 0 & \text{para } j = n_j, \dots, n \\ 0 &= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T & (m \text{ condiciones de optimalidad}) \\ (\lambda^T f)_{t=t_f} &= -1 \end{aligned}$$

6.1. Ejemplo. (Problema de Zermelo)

Un barco debe trasladarse entre dos puntos A y B de la costa en una región de fuertes corrientes. La magnitud y dirección de las corrientes es conocida como una función vectorial de punto

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}$$

La magnitud de la velocidad del barco relativa al agua es V siendo θ la dirección en que apunta el barco en relación al sistema de ejes inercial. El problema que se propone es el de realizar el transporte de A a B en tiempo mínimo.

Solución

Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \theta + u(x, y) \\ \dot{y} &= V \sin \theta + v(x, y) \end{aligned}$$

el hamiltoniano es:

$$H(x, y, \theta, \lambda_x, \lambda_y) = \lambda_x(V \cos \theta + u(x, y)) + \lambda_y(V \sin \theta + v(x, y)) + 1$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_x \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_y \frac{\partial v}{\partial x} \\ \dot{\lambda}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda_x \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_y \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

aquí, la variable de control es θ ya que el módulo de la velocidad relativa al agua V es constante. De las condiciones de optimalidad sacamos

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 = V(-\lambda_x \sin \theta + \lambda_y \cos \theta) \Rightarrow \tan \theta = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}$$

Se puede demostrar que al estar minimizando t_f y H independiente del tiempo, H debe ser constante y nula. (Ver Apéndice). Resolviendo las ecuaciones

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\lambda_y}{\lambda_x} \\ 0 &= \lambda_x(V \cos \theta + u(x, y)) + \lambda_y(V \sin \theta + v(x, y)) + 1\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\lambda_x &= \frac{-\cos \theta}{V + u(x, y) \cos \theta + v(x, y) \sin \theta} \\ \lambda_y &= \frac{-\sin \theta}{V + u(x, y) \cos \theta + v(x, y) \sin \theta}\end{aligned}$$

substituyendo estas relaciones en una de las ecuaciones de Euler-Lagrange llegamos a

$$\dot{\theta} = \sin^2 \theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \cos^2 \theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

esta ecuación resuelta simultáneamente con las ecuaciones del movimiento nos proporcionarán las trayectorias óptimas.

7. APÉNDICE

Supongamos que L y f no dependen explícitamente de t . Entonces como $H = L + \lambda^\top f$

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} = \dot{\lambda}^\top f + \frac{\partial H}{\partial x} f + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u}$$

de donde se concluye

$$\dot{H} = \left(\dot{\lambda}^\top + \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} = 0 \Rightarrow H = C^{te}$$

pues $\dot{\lambda}^\top + \frac{\partial H}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$

REFERENCIAS

1. *S. J. Citron*
- **Elements of Optimal Control**
- Holt Rinehart Winston.
2. *Arthur E. Bryson, Jr & Yu-Chi Ho*
- **Applied Optimal Control**
- Blaisdell Publishing Company.

ETSII - VIGO

E-mail address: cesareo@uvigo.es