EXAMEN
Regulación Automática
3$^{\underline{\circ}}$ Minas

23 de mayo de 2011

Item n$^{\underline{\circ}}$ 1 (2 puntos)

Una planta tiene como función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+4)(s-4)}$$

Se desea que el conjunto regulado (lazo cerrado) tenga las prestaciones:

- Error nulo ($e(\infty)$) en régimen permanente para entrada en escalón.
- Sobreoscilación máxima (SO) en al respuesta a escalón de 4.32 %.
- Tiempo de asentamiento (t_a) dentro de 5 % del valor final, de 3.34 [s].

En estas condiciones se pide:

- ¿Donde debe ubicarse el par de polos de lazo cerrado (s_d) para que se cumplan las condiciones requeridas?
- ¿Cual el aporte de fase con que debe contribuir el compensador?
- Calcular el compensador.
- ¿Es necesario pre-filtro? En caso afirmativo mostrar su estructura.

Item n$^{\underline{\circ}}$ 2 (2 puntos)

Las ecuaciones que describen un levitador magnético son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - F(i,x) \\ y &= Dx \end{aligned}$$

donde la fuerza magnética F es dada por

$$F(i,x) = K\frac{i^2}{x^2}$$

Llamaremos $u = i,\ x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$. El punto operativo de funcionamiento es i_o, x_o. Para los valores adoptados en unidades coherentes

$$D = 1,\ i_o = 5,\ m = 0.2,\ g = 10,\ \ K = 1$$

se pide:

- Imponiendo $i = i_o = u_o$ como corriente nominal de equilibrio, determinar el valor de x_o en el punto de equilibrio.
- Efectuar la linealización de la planta en un entorno del punto operativo $\{i_o,\ x_o\}$.
- Determinar la función de transferencia $G_p(s) = Y(s)/U(s)$.

Item n$^{\underline{o}}$ 3 (2 puntos)

Para un sistema mecánico conforme figura 1 se requiere:

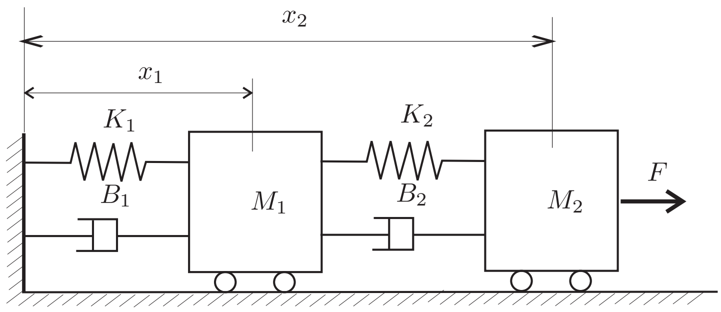

Figura 1: 2-Masas-Muelles-Amortiguadores

- Proponer un modelo dinámico (sistema de ecuaciones diferenciales) que lo represente a sabiendas que debe considerarse como entrada $F(t)$ y salida la posición x_2.
- Proponer un arreglo `simulink` utilizando integradores, sumadores, productos por constantes, que sirva para simularlo.
- Determinar la función de transferencia $G(s) = X_2(s)/F(s)$.

Item n$^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

Elaborar un controlador por realimentación de estados para la planta con función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+4)(s-4)}$$

de modo que en lazo cerrado cumpla las especificaciones

- Sobreoscilación máxima (SO) en al respuesta a escalón de 4.32 %.
- Tiempo de asentamiento (t_a) dentro de 5 % del valor final, de 3.34 [s].

Si ahora se pide error nulo ($e(\infty)$) en régimen permanente para entrada en escalón, ¿Cual sería el pre-filtro necesario ?

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (2 puntos)

Se quiere automatizar el mecanismo de apertura/cierre de un toldo. El mecanismo consiste de:

- Un motor que puede encontrarse en tres estados:

  MB Motor bajando/soltando el toldo.

  MS Motor subiendo/recogiendo el toldo

  MP Motor parado.

- Dos sensores fin-de-carrera:

  SA Fin de carrera en apertura.

  SC Fin de carrera en cierre.

- Mando de activación/desactivación del mecanismo (M).

Funcionamiento: El toldo se supone inicialmente recogido. Al pulsar M el toldo se abre asta llegar al fin de carrera de apertura, y permanece en esta posición asta que se requiera su cierre activando nuevamente el mando M. Si durante el proceso de apertura se pulsa M, el mecanismo se detiene en la posición actual. Si se pulsa de nuevo M el mecanismo recoge el toldo y para.

Se pide describir el funcionamiento del mecanismo utilizando una red de Petri.

Fórmulas Útiles

$$
\begin{aligned}
SO &= e^{-\pi \tan\theta} \\
t_a &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{20}{\cos\theta}\right)
\end{aligned}
$$

1. Soluciones

Item n$^{\underline{o}}$ 1 (2 puntos)

La planta es tipo 0 por tanto tendremos que utilizar un compensador con un polo en el origen. Este polo podemos incorporarlo en la planta pasando a considerar la planta como

$$G_p(s)' = \frac{1}{s(s+4)(s-4)}$$

El punto de ubicación del par de polos de lazo cerrado viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} SO & = & e^{-\pi \tan(\theta)} & = & 0.0432 \\ t_a & = & \log\left(\dfrac{20}{\cos(\theta)}\right)/\alpha & = & 3.34 \end{array} \right\} \Rightarrow s_d = -1 \pm j$$

El aporte de fase del compensador será:

$$\angle G_c(s_d) = \pm\pi - (-\theta_0 - \theta_{-4} - \theta_4)$$

donde θ_i representa la fase del polo ubicado en i. Calculando tendremos

$$\angle G_c(s_d) = \pm 180^\circ + 37.87^\circ \approx 142.125^\circ$$

Este aporte de fase es positivo y se puede obtener con dos ceros iguales ubicados en

$$\frac{1}{-1-(-z)} = \tan(142.125^\circ/2) \Rightarrow z = 1.34311$$

La ganancia del compensador se obtiene de acuerdo con

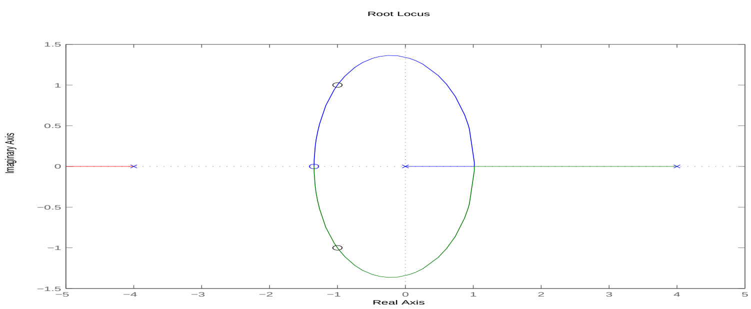

Figura 2: Lugar de raíces de la planta compensada

$$|G_c(s_d)G_p(s_d)'| = 1 \Rightarrow k_c \rho_{-z}^2 \frac{1}{\rho_0 \rho_4 \rho_{-4}} = 1 \Rightarrow k_c = \frac{1}{\rho_0 \rho_{-4} \rho_4 \rho_{-z}^2}$$

donde $\rho_i = |s_d - i|$. El compensador es un PID con estructura

$$PID(s) = k_c \frac{(s+z)^2}{s}, \quad z = 1.34311,\ k_c = 20.4018$$

La función de transferencia de lazo cerrado queda pues

$$G_{lc}(s) = \frac{k_c(s+z)^2}{s(s+4)(s-4) + k_c(s+z)^2} = \frac{k_c(s+z)^2}{(s+p)[(s+1)^2+1]}$$

El pre-filtro es

$$G_f(s) = \frac{s+p}{p} \frac{z^2}{(s+z)^2}$$

donde p es el tercer polo del LR.

Item n$^{\underline{o}}$ 2 (2 puntos)

De la condición de equilibrio ($\dot{x} = \ddot{x} = 0$) se obtiene

$$x_0 = \frac{i_0}{\sqrt{\frac{mg}{K}}} = 1.118$$

Aplicando el operador de variación en un entorno del punto de equilibrio x_0, i_0 tendremos:

$$\delta(m\ddot{x}) = \delta(mg) - \delta(F(i,x)) \Rightarrow m\delta\ddot{x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \delta x - \left(\frac{\partial F}{\partial i}\right)_0 \delta i = -C_1\delta x - C_2\delta i$$

$$\delta y = D\delta x \Rightarrow \frac{\delta Y(s)}{\delta X(s)} = D$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$(ms^2 - C_1)\delta X(s) = -C_2\delta I(s) \Rightarrow \frac{\delta X(s)}{\delta I(s)} = -\frac{C_2/m}{s^2 - C_1/m}$$

y la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{\delta Y(s)}{\delta I(s)} = -\frac{DC_2/m}{s^2 - C_1/m} = -\frac{4}{s^2 - 5.65}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 3 (2 puntos)

El modelo de la planta es

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -b_1\dot{x}_1 - k_1x_1 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2(x_2 - x_1) + F \end{aligned}$$

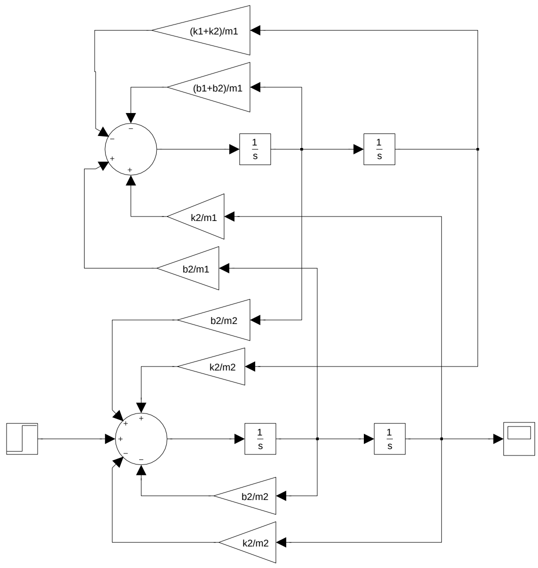

Figura 3: Arreglo simulink del problema 3

La transformada de Laplace del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{array}{rcl} (m_1 s^2 + (b_1+b_2)s + k_1 + k_2)X_1(s) - (b_2 s + k_2)X_2(s) & = & 0 \\ -(b_2 s + k_2)X_1(s) + (m_2 s^2 + b_2 s + k_2)X_2(s) & = & F(s) \end{array}$$

Resolviendo

$$G(s) = \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{(m_1 s^2 + (b_1+b_2)s + k_1 + k_2)}{(m_1 s^2 + (b_1+b_2)s + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + b_2 s + k_2) - (b_2 s + k_2)^2}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

Dada la función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

se obtiene de forma directa una versión de estado.

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{array}$$

Con $u = y_{ref} - Kx$ la planta en lazo cerrado $\dot{x} = Ax - BKx + By_{ref} = (A - BK)x + By_{ref}$ tiene función de transferencia

$$G_{lc}(s) = C \cdot (sI - A + BK)^{-1} \cdot B = \frac{Y(s)}{Y_{ref}(s)}$$

Desarrollando tendremos:

$$G_{lc}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ k_1 - a_0 & s + k_2 - a_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por donde

$$G_{lc}(s) = \frac{1}{s^2 + (k_2 + a_1)s + (k_1 + a_0)}$$

Se quiere que en lazo cerrado el polinomio característico sea

$$[(s+1)^2 + 1] = s^2 + 2s + 2$$

Para ello es suficiente hacer

$$\begin{aligned} k_2 + a_1 &= 2 \\ k_1 + a_0 &= 2 \end{aligned}$$

Para pre-filtro basta con incorporar en línea a la entrada, una multiplicación por la constante 2.

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (2 puntos)

Una red posible ...

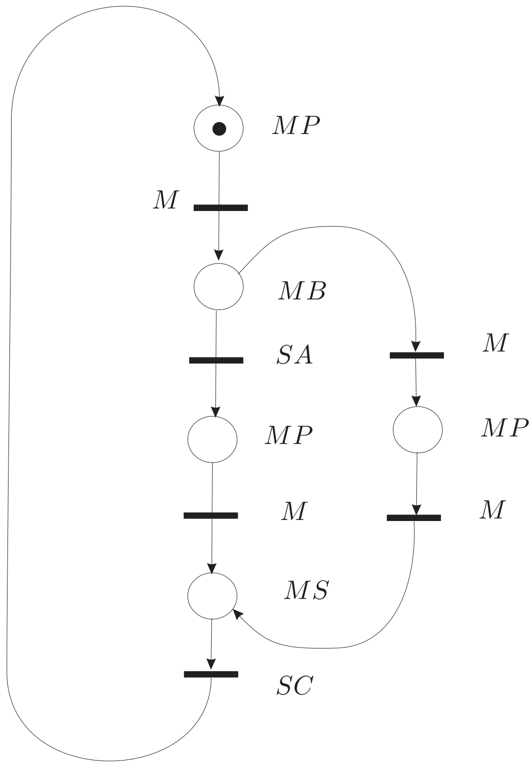

Figura 4: Red de Petri asociada al problema 5