EXAMEN
Regulación Automática
$3^{\underline{\circ}}$ Minas

14 de junio de 2010

Item $\text{n}^{\underline{\circ}}$ 1 (2 puntos)

Una planta tiene como función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)}$$

Se desea que el conjunto regulado (lazo cerrado) tenga las prestaciones:

- Error nulo ($e(\infty)$) en régimen permanente para entrada en escalón.
- Sobreoscilación máxima (SO) en al respuesta a escalón de 4.32 %.
- Tiempo de asentamiento (t_a) dentro de 5 % del valor final, de 3.34 [s].

En estas condiciones se pide:

- ¿Donde debe ubicarse el par de polos de lazo cerrado (s_d) para que se cumplan las condiciones requeridas?
- ¿Cual el aporte de fase con que debe contribuir el compensador?
- Calcular el compensador.
- ¿Es necesario pre-filtro? En caso afirmativo mostrar su estructura.

Item $\text{n}^{\underline{\circ}}$ 2 (2 puntos)

Las ecuaciones que describen un levitador magnético son:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - F(i,x) \\ y &= Dx \end{aligned}$$

donde la fuerza magnética F y la inductancia L son dadas por

$$F(i,x) = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL(x)}{dx}, \;\; L(x) = L_b + \frac{C}{2x}$$

Llamaremos $u = i,\ x_1 = x,\ x_2 = \dot{x}$. El punto operativo de funcionamiento es i_o, x_o. Para los valores adoptados en unidades coherentes

$$D = 1,\ i_o = 5,\ m = 0.2,\ g = 10,\ L_b = 0.2,\ C = 0.00008$$

se pide:

- Imponiendo $i = i_o = u_o$ como corriente nominal de equilibrio, determinar el valor de x_o en el punto de equilibrio.
- Efectuar la linealización de la planta en un entorno del punto operativo $\{i_o, x_o\}$.
- Determinar la función de transferencia $G_p(s) = Y(s)/U(s)$.

Item n$^{\underline{\circ}}$ 3 (2 puntos)

Para un sistema mecánico conforme figura 2 se requiere:

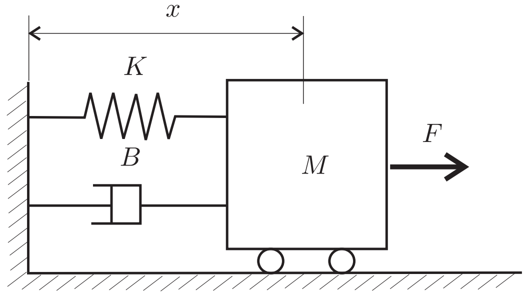

Figura 1: Masa-Muelle-Amortiguamiento

- Proponer un modelo dinámico (ecuación diferencial) que lo represente a sabiendas que debe considerarse como entrada $F(t)$ y salida $x(t)$.
- Proponer un arreglo `simulink` utilizando integradores, sumadores, productos por constantes que sirva para simularlo.
- Determinar la Transformada de Laplace de $x(t)$ suponiendo que se aplica una fuerza $F(t)$ en escalón unitario.
- Considerando los valores $M = 1$, $B = 4$, $K = 3$ determinar la respuesta temporal $x(t)$ suponiendo condiciones iniciales nulas.

Item n$^{\underline{\circ}}$ 4 (2 puntos)

Elaborar un controlador por realimentación de estados para la planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de modo que en lazo cerrado exhiba sus polos en $\{-3 \pm j, -10, -10\}$.

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (2 puntos)

En la figura 2 se representa un arreglo hidráulico con dos depósitos en la vertical

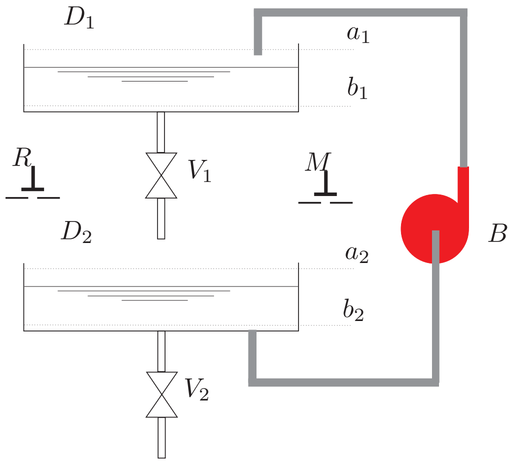

Figura 2: Depósitos verticales

servidos por una bomba B y dos electro válvulas V_1, V_2. Cada depósito (D_1, D_2) tiene dos detectores que indican nivel máximo a_i, $\{i = 1, 2\}$(depósitos completos $a_i = 1$), e nivel mínimo b_i, $\{i = 1, 2\}$(depósitos vacíos $b_i = 1$). Partiendo de una condición en que los dos depósitos están vacíos $(a_1 = 0,\, b_1 = 1, a_2 = 0,\, b_2 = 1)$ y las electro válvulas cerradas, el funcionamiento del arreglo deberá efectuarse en conformidad a las siguientes reglas:
Después de pulsar el contacto M

- B se pone a funcionar.
- B se para si $a_1 = 1$ o si $b_2 = 1$ y solo vuelve a accionarse cuando $b_1 = 1$.
- V_1 se cierra si $a_2 = 1$ y se abre si $b_2 = 1$.
- V_2 permanece cerrada hasta pulsarse el contacto R.

Después de pulsar el contacto R

- se para B.
- V_1 permanece abierta hasta $b_1 = 1$, cuando se cierra
- V_2 se abre hasta que $b_2 = 1$ cuando se cierra.

Se pide: Elaborar una red de petri que represente la operación del sistema de depósitos.

Fórmulas Útiles

$$
\begin{aligned}
SO &= e^{-\pi \tan\theta} \\
t_a &= \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{20}{\cos\theta}\right)
\end{aligned}
$$

1. Soluciones

Item n$^{\underline{\text{o}}}$ 1 (2 puntos)

La planta es tipo 0 por tanto tendremos que utilizar un compensador con un polo en el origen. Este polo podemos incorporarlo en la planta pasando a considerar la planta como

$$G_p(s)' = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

El punto de ubicación del par de polos de lazo cerrado viene dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} SO & = & e^{-\pi \tan(\theta)} & = & 0.0432 \\ t_a & = & \log\left(\dfrac{20}{\cos(\theta)}\right)/\alpha & = & 3.34 \end{array} \right\} \Rightarrow s_d = -1 \pm j$$

El aporte de fase del compensador será:

$$\angle G_c(s_d) = \pm\pi - (-\theta_0 - \theta_{-1} - \theta_{-4})$$

donde θ_i representa la fase del polo ubicado en i. Calculando tendremos

$$\angle G_c(s_d) = \pm 180^\circ + 135^\circ + 90^\circ + 18.4^\circ = -180^\circ + 180^\circ + 63.4^\circ = 63.4^\circ$$

Este aporte de fase se puede obtener con un cero ubicado en

$$\frac{1}{-1-(-z)} = \tan(63.4^\circ) \Rightarrow z = 1 + \frac{1}{\tan(63.4^\circ)} = 1.5$$

La ganancia del compensador se obtiene de acuerdo con

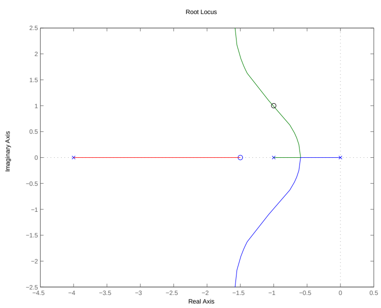

Figura 3: Lugar de raíces de la planta compensada

$$|G_c(s_d)G_p(s_d)'| = 1 \Rightarrow k_c \rho_{-1.5} \frac{1}{\rho_0 \rho_{-1} \rho_{-4}} = 1 \Rightarrow k_c = \frac{1}{\rho_0 \rho_{-1} \rho_{-4} \rho_{-1.5}}$$

donde $\rho_i = |s_d - i|$. El compensador es un PI con estructura

$$PI(s) = k_c \frac{s + 1.5}{s}$$

La función de transferencia de lazo cerrado queda pues

$$G_{lc}(s) = \frac{k_c(s + 1.5)}{(s + 1)(s + 4) + k_c(s + 1.5)} = \frac{k_c(s + 1.5)}{(s + p)[(s + 1)^2 + 1]}$$

El pre-filtro es

$$G_f(s) = \frac{2}{k_c} \frac{(s + p)}{(s + 1.5)}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 2 (2 puntos)

De la condición de equilibrio ($\dot{x} = \ddot{x} = 0$) se obtiene

$$x_0 = \frac{i_0 \sqrt{C}}{2\sqrt{mg}} = 0.0158114$$

Las matrices A, B, C representantes de la linealización son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{4g^{3/2}\sqrt{m}}{i_0\sqrt{C}} & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{2g}{i_0} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} D & 0 \end{pmatrix}$$

y la función de transferencia

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{0.178885}{56.5685\text{-}0.0447214 s^2}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 3 (2 puntos)

El modelo de la planta es

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F$$

el arreglo `simulink` es La transformada de Laplace de la respuesta $x(t)$ delante de una entrada en escalón es

$$X(s) = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \frac{1}{s}$$

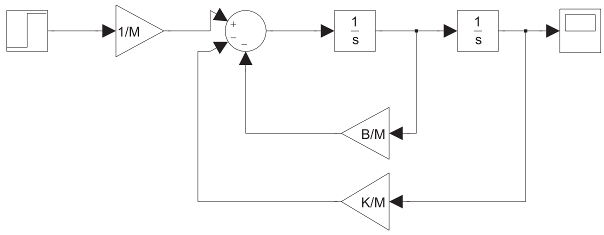

Figura 4: Arreglo simulink del problema 3

Para los valores pedidos tendremos

$$X(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3} + \frac{c_3}{s}$$

y la respuesta temporal con condiciones iniciales nulas será

$$x(t) = \left(c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + c_3\right) \mathbf{1}(t)$$

Item n$^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

La función de transferencia del sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

se obtiene fácilmente pues

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = x_4,\ \dot{x}_4 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + u$$

transformando Laplace

$$\left\{ \begin{array}{rcl} sX_1 & = & X_2 \\ sX_2 & = & X_3 \\ sX_3 & = & X_4 \\ sX_4 + a_0 X_1 + a_1 X_2 + a_2 X_3 + a_3 X_4 & = & U \end{array} \right. \Rightarrow X_1 = \frac{1}{(s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) X_1} U$$

La planta en lazo cerrado $\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$ tine función de transferencia

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 - a_0 & -k_2 - a_1 & -k_3 - a_2 & -k_4 - a_3 \end{pmatrix} x$$

Con el mismo procedimiento y considerando ahora la condición inicial de $x_4(t)$ tendremos:

$$\begin{aligned} sX_1 &= X_2 \\ sX_2 &= X_3 \\ sX_3 &= X_4 \\ sX_4 + (k_1 + a_0)X_1 + (k_2 + a_1)X_2 + (k_3 + a_2)X_3 + (k_4 + a_3)X_4 &= x_4(0) \end{aligned}$$

por donde

$$X_1 = \frac{1}{(s^4 + (k_1 + a_3)s^3 + (k_2 + a_2)s^2 + (k_3 + a_1)s + (k_4 + a_0))X_1} x_4(0)$$

Se quiere que en lazo cerrado el polinomio característico sea

$$[(s+3)^2 + 1](s+10)^2 = s^4 + 26s^3 + 230s^2 + 800s + 1000$$

Para ello es suficiente hacer

$$\begin{aligned} k_1 + a_3 &= 26 \\ k_2 + a_2 &= 230 \\ k_3 + a_1 &= 800 \\ k_4 + a_0 &= 1000 \end{aligned}$$

Item n° 5 (2 puntos)

Una red posible ...

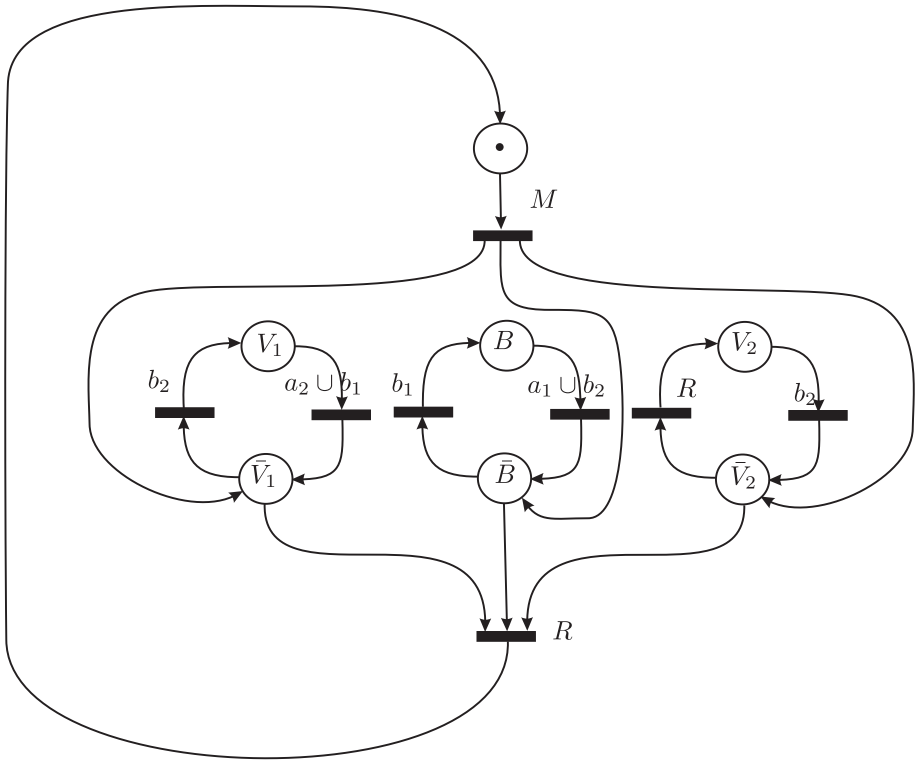

Figura 5: Red de Petri asociada al problema 5