EXAMEN
Regulación Automática
3º Minas

09 de junio de 2008

Item nº 1 (2 puntos)

Dado el modelo dinámico de un motor de CC acoplado a una carga a través de un eje rígido, cuyas ecuaciones de dinámica se exhiben a seguir,

$$E = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \qquad \text{Circuito eléctrico}$$

$$\begin{aligned} e_b &= K_m \dot{\theta}_m \\ \tau_m &= K_m i_a \qquad \text{Motor CC} \end{aligned}$$

$$(J_m + J_L)\ddot{\theta}_m = \tau_m - B_m \dot{\theta}_m \qquad \text{Mecánica del motor y de la carga}$$

se pide:

1. Elabore la función de transferencia $G_p(s) = \Theta_m(s)/E(s)$.
2. Para los valores

   $$K_m = 2,\ R_a = 1,\ J_m = 1,\ J_L = 9,\ B_m = 1,\ L_a = 1$$

   El lazo se cierra a través de un controlador PD que modula la tensión de armadura del motor. $E = K_p(\theta_R - \theta_m) + K_d \frac{d}{dt}(\theta_R - \theta_m)$. Se pide el rango de valores del la constante proporcional K_p que mantienen la planta estable en lazo cerrado. Considerar $K_d = 0.2$.

Item nº 2 (2 puntos)

Se desea estabilizar en lazo cerrado, la planta de función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2}$$

Se desea que el lazo cerrado exhiba las prestaciones:

- Error nulo en régimen permanente para entrada en escalón ($e(\infty) = 0$)
- Margen de fase $MF \geq 60°$.
- Frecuencia de corte $\omega_c \geq 10$[rad/s].

Se pide determinar el controlador que haga cumplir las especificaciones exigidas.

Item n$^{\underline{o}}$ 3 (2 puntos)

Elaborar el modelo lineal que aproxima la planta no lineal presentada en el diagrama de la figura 2 La planta no lineal se rige por las ecuaciones:

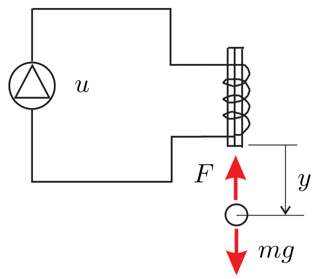

Figura 1: Diagrama del levitador magnético

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= g - K\left(\frac{u}{x_1 + a}\right)^2 \\
y &= x_1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde g el la constante de la aceleración de la gravedad, u la corriente de control, $K = 1$, $a = 0.1$, $g = 10$ son constantes, x_1, x_2 el estado y la salida medida. El punto operativo será establecido para una corriente nominal $u_o = 1$.

Item n$^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

Una planta térmica tiene la dinámica descrita a través de la ecuación diferencial

$$\frac{dT(t)}{dt} + T(t) = q(t)$$

donde $T(t)$ es la temperatura en la planta y $q(t)$ el flujo de calor aplicado. Este flujo es modulado por un controlador PI cuya dinámica es

$$q(t) = 2e(t) + 2\int_0^t e(\tau)d\tau$$

La planta está en lazo cerrado bajo la acción del controlador siendo por tanto

$$e(t) = T_r(t) - T(t)$$

donde $T_r(t)$ es la temperatura de referencia. En este contexto se pide:

- Determinar la función de transferencia $G_{lc} = T(s)/T_r(s)$.
- Determinar la respuesta $T(t)$ a un escalón unitario en la referencia $T_r(t)$.
- Determinar la respuesta de régimen permanente cuando $T_r(t) = \sin(4t)$.

Item n$^{\underline{\circ}}$ 5 (2 puntos)

Se quiere automatizar una puerta de garage de modo que:

- Cuando cerrada, accionando el mando a distancia, la puerta se abre con velocidad constante, hasta llegar a la posición de máxima abertura, permaneciendo abierta por el espacio de 1 minuto. Acto seguido se cierra con la misma velocidad constante .
- En el pasillo de acceso al garaje está situada una foto-célula que detecta la presencia de objetos. Esta célula se activa durante el proceso de cierre y se desactiva con la puerta cerrada. Si durante el proceso de cierre de la puerta la célula detecta algún objeto en el pasillo de acceso, el proceso de cierre se interrumpe, iniciando el proceso de abertura a partir de este mismo instante, repitiendo el ciclo normal: espera de 1 minuto y cierre a velocidad constante.
- Si durante el proceso de abertura o de cierre el mando fuere pulsado, la puerta se parará y solo continuará en la operación de abertura o cierre con otro pulsar del mando.

Se pide elaborar una red de Petri que represente la dinámica de la operación de la puerta de garaje.

Consideraremos como entradas: mando a distancia, célula foto eléctrica, detector de puerta abierta, fin del temporizador, detector de puerta cerrada. Como salidas, motor girando a la derecha, motor girando a la izquierda, motor parado, inicio del temporizador.

Fórmulas Útiles

$$
\begin{aligned}
SO &= e^{-\pi \tan\theta} \\
t_a &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{20}{\cos\theta}\right)
\end{aligned}
$$

1. SOLUCIONES

Cuestión $\sharp$1

Substituyendo las relaciones algebraicas se llega a

$$
\begin{aligned}
E &= (R_a + sL_a)I_a + sK_m\Theta_m \\
(s^2(J_m + J_L) + sB_m)\Theta_m &= K_m I_a
\end{aligned}
$$

donde se puede elaborar el arreglo de la figura. La función de transferencia resulta

$$
G_{lc}(s) = \frac{\dfrac{K_p + sK_d}{sK_m}}{1 + \dfrac{K_p + sK_d}{sK_m} + \dfrac{s^2(J_m + J_L) + sB_m}{K_m}\dfrac{R_a + sL_a}{sK_m}}
$$

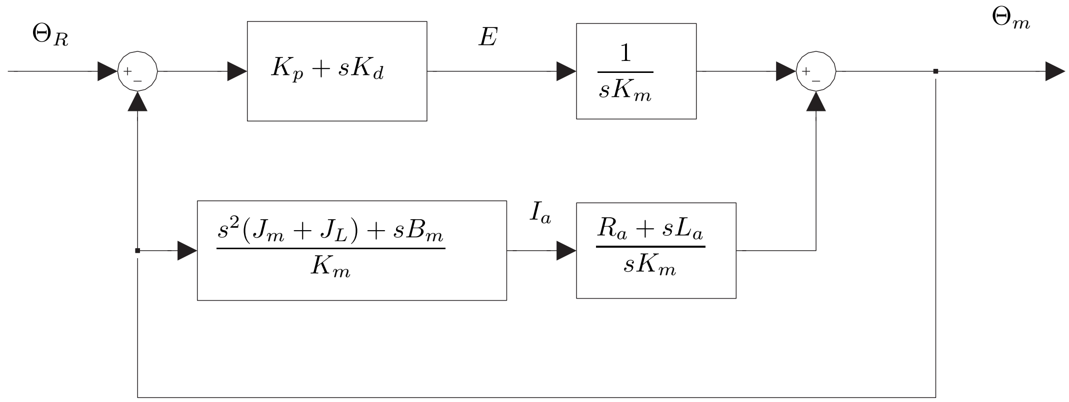

Figura 2: Diagrama de bloques del problema ♯1

que simplificando proporciona

$$G_{lc}(s) = \frac{K_m(K_p + sK_d)}{L_a(J_m + J_L)s^3 + R_a(J_m + J_L)s^2 + (K_dK_m + K_m^2 + B_mR_a)s + K_mK_p}$$

substituyendo los valores en el denominador se obtiene

$$D(s) = 10s^3 + 11s^2 + 5.4s + 2K_p$$

Aplicando el criterio de Routh se obtiene $0 < K_p < 2.97$.

Cuestión ♯2

Por compensador utilizaremos un PD con la estructura

$$PD(s) = K_d(s/\omega_o + 1)$$

Las condiciones a cumplir son:

$$\begin{aligned} |G_p(j\omega_c)PD(j\omega_c)| &= 1 \\ \angle G_p(j\omega_c)PD(j\omega_c) &= -\pi + MF \end{aligned}$$

que aplicadas al problema quedan

$$\begin{aligned} K_p\frac{\sqrt{1+(\omega_c/\omega_o)^2}}{\omega_c^2} &= 1 \\ \arctan(\omega_c/\omega_o) - \pi &= -\pi + \pi/3 \end{aligned}$$

de donde se saca $\omega_o = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega_c,\ K_p = \frac{\omega_c^2}{2}$. Escogiendo $\omega_c = 10$ tendremos

$$K_p = 50,\ K_d = \omega_o K_p = \frac{\sqrt{3}}{3}10 \times 50 = 288.675$$

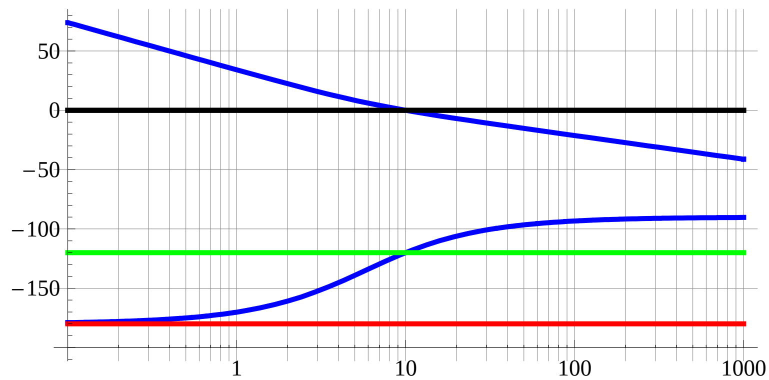

Figura 3: Solución del problema ♯2

Cuestión ♯3

El punto de equilibrio proporciona

$$x_1^o = \sqrt{\frac{K}{g}u^o} - a$$

para las matrices A, B, C, D tendremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2Ku^2}{(x_1+a)^3} & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2Ku}{(x_1+a)^2} \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

substituyendo el valor en el punto de equilibrio obtendremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 20\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que obtenemos la función de transferencia

$$G_p(s) = -\frac{20}{s^2 - 20\sqrt{10}}$$

Cuestión ♯4

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1} = \frac{T(s)}{q(s)}, \; G_c(s) = 2\frac{s+1}{s} = \frac{u(s)}{e(s)}$$

La función de transferencia de lazo cerrado se calcula como sigue

$$G_{lc}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)} = \frac{2}{s+2}$$

Para calcular la respuesta a escalón se hace

$$T(s) = G_{lc}(s)\frac{1}{s} = \frac{2}{s+2}\frac{1}{s}$$

La antitransformada es inmediata

$$T(t) = (1 - e^{-2t})\mathbf{1}(t)$$

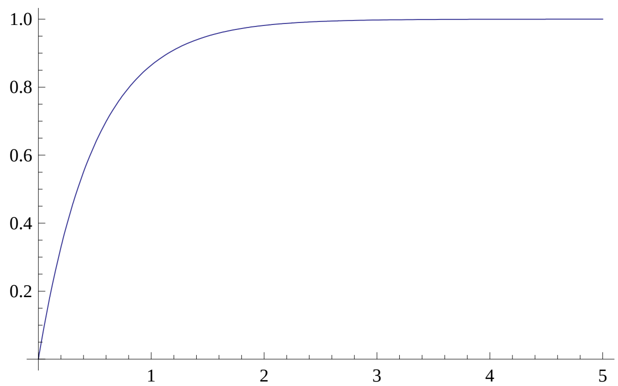

Figura 4: Respuesta a escalón

La respuesta en régimen permanente a la entrada $T_r(t) = \sin(4t)\mathbf{1}(t)$ se calcula sabiendo que

$$T_{r.p.}(t) = |G_{lc}(j4)| \sin(4t + \angle G_{lc}(j4)) = \frac{\sqrt{5}}{5} \sin(4t - 1.107)$$

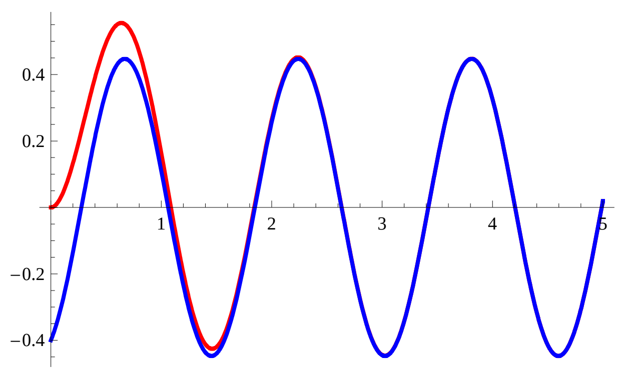

Figura 5: Comparación del régimen permanente