EXAMEN
Regulación Automática
$3^{\underline{o}}$ Minas

17 de septiembre de 2009

Item $n^{\underline{o}}$ 1 (1 puntos)

Elaborar un controlador por realimentación de estados para la planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de modo que en lazo cerrado exhiba sus polos en -3.

Item $n^{\underline{o}}$ 2 (1 puntos)

Determinar la formulación entrada-salida (FT) $Y(s) = G(s)U(s)$ para la planta de la cuestión anterior

Item $n^{\underline{o}}$ 3 (1 puntos)

Elaborar el modelo lineal (función de transferencia) que aproxima la planta no lineal en el punto operativo $u = 1$. La planta no lineal se rige por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 1 - xu \\ y &= x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

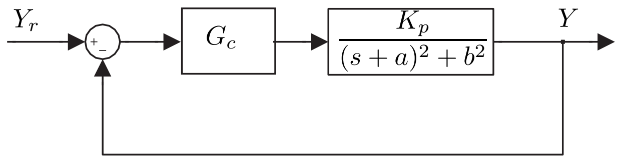
donde u es la actuación o entrada, x el estado e y la salida.

Item $n^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

Una planta con función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(s+a)^2 + b^2}$$

debe ser estabilizada en lazo cerrado por el controlador $G_c(s)$ de modo que se verifique:



- Error nulo en régimen permanente en lazo cerrado, para entrada en escalón ($e(\infty) = 0$)
- La planta en lazo cerrado debe tener el doble de velocidad de respuesta de la planta en lazo abierto. Así el denominador de la planta de lazo cerrado debe ser $(s + 2a)^2 + (\gamma b)^2$
- γ debe ser determinado de forma que la sobreoscilación sea del 20 %.

Se pide determinar el controlador.

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (1 puntos)

Determine la respuesta a escalón unitario de la planta

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 6 (1 puntos)

La planta

$$G_p(s) = \frac{(s+1)}{(s-2)(s+2)}$$

debe estabilizarse con un controlador con la estructura

$$G_c(s) = K_c \frac{(s+a)}{s}$$

Determinar todos los valores de a, K_c que garantan la estabilidad en lazo cerrado.

Item n$^{\underline{o}}$ 7 (3 puntos)

Se quiere automatizar una *vending machine*. Esta máquina sirve dos tipos de producto: bocadillos, y mini-pizzas. Cada producto tiene precio distinto. Un bocadillo cuesta 15 dineros y una mini-pizza 20 dineros. La máquina acepta apenas monedas de 5 y 10 dineros. Los productos están almacenados a una temperatura lo suficientemente baja para permitir su conservación durante un cierto período de tiempo. El producto es seleccionado por cliente a través de un pulsador individual (B o M) para cada mercancía, asociado al total depositado (15, 20). El producto debe ser calentado a una temperatura adecuada para su consumición. Hay un pulsador (D) para cancelar la operación de compra que devuelve los dineros depositados.

- Los productos están apilados en filas distintas.

- El producto escogido deberá ser calentado en el horno de rayos infra-rojos que la máquina dispone por un tiempo relacionado con el producto. Bocadillos por 15[s]y mini-pizzas por 25[s].
- El horno solo puede calentar un producto de cada vez.
- Una vez calentado el producto, se abre una compuerta de servicio por la que se accede al producto, lo que cierra el ciclo de servicio.
- La devolución (pulsador D) cierra el ciclo de servicio y reinicia la máquina.

Se pide elaborar una red de Petri que represente la automatización de la *vending machine*.

Fórmulas Útiles

$$\begin{aligned} SO &= e^{-\pi \tan\theta} \\ t_a &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{20}{\cos\theta}\right) \end{aligned}$$

1. Soluciones

Item n$^{\underline{o}}$ 1 (1 puntos)

Dado un sistema en la forma canónica

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

el sistema de lazo cerrado proveniente de la realimentación del estado de forma proporcional con

$$u = -\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & x_2 \end{pmatrix} u$$

queda:

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & x_2 \end{pmatrix} \right) x$$

o sea

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 - k_0 & a_1 - k_1 & a_2 - k_2 \end{pmatrix} x$$

cuyo polinomio característico es

$$p(s) = s^3 - (a_2 - k_2)s^2 - (a_1 - k_1)s - (a_0 - k_0)$$

se nos pide que el lazo cerrado posea los polos en $\{-3, -3, -3\}$ lo que implica en que el polinomio característico sea

$$p(s) = (s+3)^3 = s^3 + 9s^2 + 27s + 27$$

identificando los coeficientes tendremos:

$$\begin{aligned} 9 &= -a_2 + k_2 \\ 27 &= -a_1 + k_1 \\ 27 &= -a_0 + k_0 \end{aligned}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 2 (1 puntos)

Para el sistema de la cuestión anterior tendremos las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_3 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Efectuando substituciones tendremos

$$\dot{x}_3 = y + \ddot{y} + u = \ddot{x}_2 = y^{(3)}$$

Transformando Laplace para condiciones iniciales nulas obtendremos

$$(1+s^2)Y(s) + U(s) = s^3 Y(s)$$

o sea

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 - s^2 - 1}$$

Item n$^{\underline{\circ}}$ 3 (1 puntos)

El punto nominal es un punto de equilibrio por tanto, $\ddot{x}_o = 1 - x_o u_o = 0$. Si $u_o = 1$ entonces $x_o = 1$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & 1 - xu \\ y & = & x^2 \end{array} \right. \Rightarrow \delta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \delta\ddot{x} & = & -\delta x u_o - x_o \delta u \\ \delta y & = & 2x_o \delta x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \delta\ddot{x} & = & -\delta x - \delta u \\ \delta y & = & 2\delta x \end{array} \right.$$

Aplicando Laplace se saca

$$\frac{\delta y(s)}{\delta u(s)} = G(s) = -\frac{2}{s^2+1}$$

Item n$^{\underline{\circ}}$ 4 (2 puntos)

Sea G_{lc} la función de transferencia de lazo cerrado. Entonces vale

$$\frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} = G_{lc}$$

de donde se saca

$$G_c = \frac{G_{lc}}{G_p(1 - G_{lc})}$$

pero

$$G_p = \frac{K_p}{(s+a)^2 + b^2},\ G_{lc} = \frac{(2a)^2 + (\gamma b)^2}{(s+2a)^2 + (\gamma b)^2}$$

efectuando las operaciones se llega a:

$$G_c = \frac{(2a)^2 + (\gamma b)^2}{K_p} \times \frac{s^2 + 2as + a^2 + b^2}{s(s+4a)}$$

Para determinar la sobreoscilación se utiliza:

$$SO = e^{-\pi \tan\theta} = e^{-\pi(\frac{2a}{\gamma b})} = 0.20$$

de donde se saca el valor de γ.

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (1 puntos)

La respuesta a escalón unitario de la planta

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

se hace determinando la anti-transformada de

$$G(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

o sea

$$y(t) = (A + Be^{-2t} + Ce^{-3t})\mathbf{1}(t)$$

el cálculo de A, B y C se hace por residuos

$$A = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = 1/6,\ B = \lim_{s\to -2}(s+2)G(s)\frac{1}{s} = 1/2,\ C = \lim_{s\to -3}(s+3)G(s)\frac{1}{s} = -2/3$$

Item n$^{\underline{o}}$ 6 (1 puntos)

La planta $G_p(s)$ en lazo cerrado con el controlador $G_c(s)$ posee como función de transferencia de lazo cerrado

$$G(s) = \frac{K_c(s+a)(s+1)}{s(s^2-4) + K_c(s+a)(s+1)}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(s) = s^3 + K_c s^2 + (K_c(a+1) - 4)s + aK_c$$

El criterio de Routh nos proporciona

$$\begin{array}{c|c|c} 3 & 1 & K_c(a+1)-4 \\ 2 & K_c & aK_c \\ \hline\hline 1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{array}$$

con $b_1 = -\frac{1}{K_c}\begin{vmatrix} 1 & K_c(a+1)-4 \\ K_c & aK_c \end{vmatrix}$, $c_1 = -\frac{1}{b_1}\begin{vmatrix} K_c & aK_c \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} = aK_c$ los valores de K_c que estabilizan la planta son los que obedecen

$$\begin{array}{rcll} K_c & > & 0 & aK_c > 0 \\ b_1 & > & 0 & K_c > \dfrac{a+4}{a+1} \\ c_1 & > & 0 & a > 0 \end{array}$$

Item n$^{\text{o}}$ 7 (2 puntos)

Una posible realización. Al pulsar D se pueden acumular marcas en la plaza de inicio pero esto no tiene mayores consecuencias pues no se propagan.