EXAMEN
Regulación Automática
3$^{\underline{o}}$ Minas

10 de septiembre de 2008

Item n$^{\underline{o}}$ 1 (2 puntos)

Dado el modelo dinámico de un motor de CC acoplado a una carga a través de un eje rígido, cuyas ecuaciones de dinámica se exhiben a seguir,

$$E = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \qquad \text{Circuito eléctrico}$$

$$\begin{aligned} e_b &= K_m \dot{\theta}_m \\ \tau_m &= K_m i_a \qquad \text{Motor CC} \end{aligned}$$

$$(J_m + J_L)\ddot{\theta}_m = \tau_m - B_m \dot{\theta}_m \qquad \text{Mecánica del motor y de la carga}$$

se pide:

1. Elabore la función de transferencia $G_p(s) = \Theta_m(s)/E(s)$.
2. El lazo se cierra incluyendo un controlador PID equivalente a la relación $E = K_p(1 + \tau_d s + \tau_i/s)e$ donde $e = \theta_R - \theta_m$ y determinando $G_{lc}(s) = \Theta_m(s)/\Theta_R(s)$. Se pide el rango de valores de la constante proporcional K_p que mantienen la planta estable en lazo cerrado.

Calcular los resultados para los valores

$$K_m = 2,\ R_a = 1,\ J_m = 1,\ J_L = 9,\ B_m = 1,\ L_a = 1,\ \tau_d = 0.2,\ \tau_i = 0.1$$

Item n$^{\underline{o}}$ 2 (2 puntos)

Un motor de CC con entrada en tensión y salida en rotación fue identificado, proporcionándonos la curva de módulos de acuerdo con la figura. Se quiere elaborar un controlador que en lazo cerrado garantice las prestaciones:

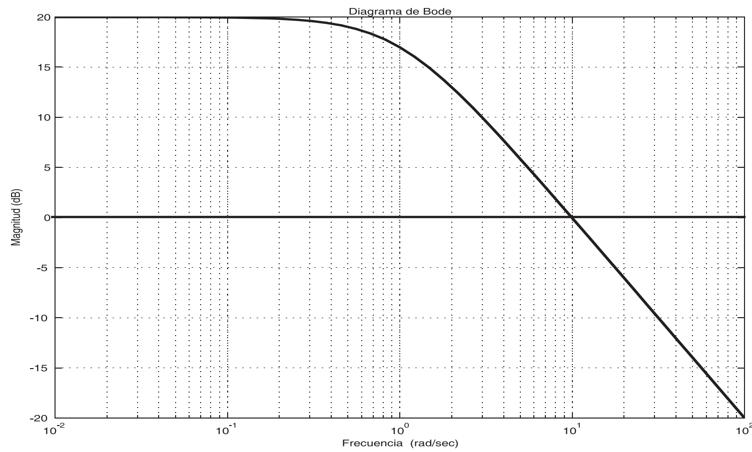

Figura 1: Resultado de la identificación de un motor de CC

- Error nulo en régimen permanente para entrada en escalón ($e(\infty) = 0$)
- Sobreoscilación máxima permitida $SO \leq 4.3\,\%$.
- Tiempo de asentamiento $t_a \leq 3.34$[s].

Se pide:

- ¿Cual es la ubicación del par de polos de lazo cerrado (s_d) que proporciona estas especificaciones?
- ¿Cual es el aporte en fase de $G_c(s)$ necesario para garantizar la pertenencia de s_d al lugar de raíces de $G_c(s)G_p(s)$?
- ¿Cual el compensador más sencillo que proporciona las prestaciones requeridas? (Calcularlo).
- ¿Es necesario incorporar pre-filtro? En caso afirmativo calcularlo.

Item n$^{\underline{o}}$ 3 (2 puntos)

Elaborar el modelo lineal

- Formulación de Estado
- Versión Entrada-Salida

que aproxima la planta no lineal presentada en el diagrama de la figura 2 La planta no lineal se rige por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - K\left(\frac{au}{x_1 + a}\right)^2 \\ y &= x_1 + bx_1^3 \end{aligned} \tag{1}$$

donde g el la constante de la aceleración de la gravedad, u la corriente de control, $K = 1$, $a = 0.1$, $b = 0.1$, $g = 10$ son constantes, x_1, x_2 el estado y la salida medida. El punto operativo será establecido para una corriente nominal $u_o = 1$.

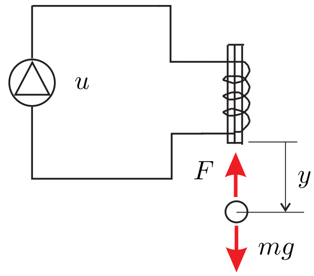

Figura 2: Diagrama del levitador magnético

Item n$^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

Para un sistema mecánico conforme figura 3 se requiere:

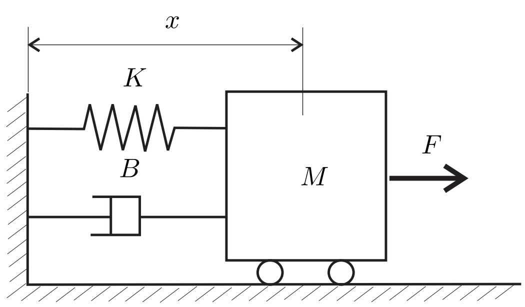

Figura 3: Masa-Muelle-Amortiguamiento

- Proponer un modelo dinámico (ecuación diferencial) que lo represente a sabiendas que debe considerarse como entrada $F(t)$ y como salida la aceleración sufrida por la masa M.
- Determinar la Transformada de Laplace de $\ddot{x}(t)$ suponiendo que se aplica una fuerza $F(t)$ en rampa unitaria.
- Considerando los valores $M = 1$, $B = 4$, $K = 3$ determinar la respuesta temporal $\ddot{x}(t)$ a rampa unitaria, suponiendo condiciones iniciales nulas.
- Determinar el comportamiento en régimen permanente de $\ddot{x}(t)$ cuando se aplica al arreglo, una fuerza sinusoidal $F(t) = \mathbf{1}(t)\sin t$.

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (2 puntos)

Se quiere automatizar el acceso de dos ordenadores a una memoria que debe ser compartida. Los estados principales a considerar en el modelado son:

- Ordenador C_1. Puede tener 3 estados a saber:

P_1 Ordenador requiere la memoria.

P_2 Ordenador utiliza la memoria.

P_3 Ordenador no necesita la memoria.

- Ordenador C_2. Puede tener 3 estados a saber:

P_4 Ordenador requiere la memoria.

P_5 Ordenador utiliza la memoria.

P_6 Ordenador no necesita la memoria.

- La Memoria M tiene un estado P_7 para indicar si está libre (con marca) o ocupada por alguno de los ordenadores (sin marca).

Se pide elaborar una red de Petri que represente la dinámica del acceso a la memoria por ambos ordenadores.

Fórmulas Útiles

$$
\begin{aligned}
SO &= e^{-\pi \tan\theta} \\
t_a &= \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{20}{\cos\theta}\right)
\end{aligned}
$$

1. Soluciones

Item n$^{\underline{o}}$ 1 (2 puntos)

Transformando Laplace se tiene:

$$E = (R_a + sL_a)i_a + e_b = \frac{(R_a + sL_a)}{K_m}\tau_m + sK_m\theta_m$$

pero

$$\tau_m = [(J_m + J_L)s^2 + B_m s]\theta_m$$

obteniéndose

$$\theta_m = \frac{K_m}{(R_a + sL_a)[(J_m + J_L)s^2 + B_m s] + sK_m^2} E = G_p(s)E$$

pero

$$E = PID(s)(\theta_R - \theta_m)$$

obteniéndose para el lazo cerrado

$$G_{LC}(s) = \frac{\theta_m}{\theta_R} = \frac{G_p(s)PID(s)}{1 + G_p(s)PID(s)}$$

cuyo denominador es responsable por la estabilidad o sea, deberemos aplicar el criterio de Routh para K_p, al numerador de la fracción polinomial

$$\texttt{numerador}(1+G_p(s)PID(s)) = s\left\{(R_a + sL_a)[(J_m + J_L)s^2 + B_m s] + sK_m^2\right\} + K_p(s+\tau_d s^2+\tau_i)K_m$$

Expandiendo el polinomio por las potencias de s tendremos:

$$p(s) = (J_m+J_L)s^4+(B_mL_a+(J_L+J_m)R_a)s^3+(K_m^2+B_mR_a+K_mK_p\tau_d)s^2++K_mK_ps+K_mK_p\tau_i$$

o con los valores numéricos

$$p(s) = 10s^4 + 11s^3 + (5 + 0.4K_p)s^2 + 2K_p s + 0.2K_p$$

Aplicando el arreglo de Routh se llega a las condiciones

$$\begin{aligned} 55 - 15.6K_p &> 0 \\ (85.8 - 31.2K_p)K_p &> 0 \\ (17.16 - 6.24K_p)K_p^2 &> 0 \end{aligned}$$

de donde se saca $0 < K_p < 2.75$

Item n$^{\underline{o}}$ 2 (2 puntos)

La función de transferencia de la planta se saca fácilmente de la gráfica

$$G_p(s) = \frac{10}{s + 1}$$

Resolviendo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^{-\pi \tan\theta} & = & 0.043 \\ \log_e \left(\dfrac{20}{\cos\theta} \right) / \alpha & = & 3.34 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \theta & = & \pi/4 \\ \alpha & = & 1 \end{array} \right.$$

por tanto se tendrá $s_d = -\alpha + j\beta = -1 + j$. Aplicando las condiciones de pertenencia tendremos:

$$\angle G_c(s_d) = \pm\pi - \angle G_p(s_d) = -\pi/2$$

lo que configura el compensador como un atrasador de fase. Sumando esto a la condición de error nulo en régimen permanente para entrada en escalón, se llega a la estructura del compensador

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s}, \ (\texttt{PI})$$

El aporte de $-\pi/2$ debe situarse en el ángulo con vértice en s_d y los segmentos $[s_d, 0]$ y $[s_d, -z + j0]$ lo que define la ubicación de z que asume el valor $z = 2$. El valor de K_c se obtiene efectuando y resolviendo la condición

$$\mid G_p(s_d) G_c(s_d) \mid = 1$$

de donde sale $K_c = 0.01$. En las figuras 4 y 5 se pueden observar las respuestas a escalón sin pre-filtro y con un pre-filtro. Se necesita pre-filtro ya que la función de transferencia no está en la forma normalizada pues es:

$$G_{lc}(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2}$$

siendo que el pre-filtro indicado es:

$$G_f(s) = \frac{2}{s+2}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 3 (2 puntos)

La linealización se efectúa en un punto de equilibrio (x^o, u_o). Los puntos de equilibrio verifican

$$\dot{x}^o = f(x^o, u_o) = 0 \Rightarrow x_2^o = 0, \ K \left(\frac{a u_o}{x_1^o + a} \right)^2 = g$$

de donde se obtiene la relación $x_1^o = \Phi(u_o)$ con

$$x_1^o = -a \left(1 \pm u_o \sqrt{\frac{K}{g}} \right)$$

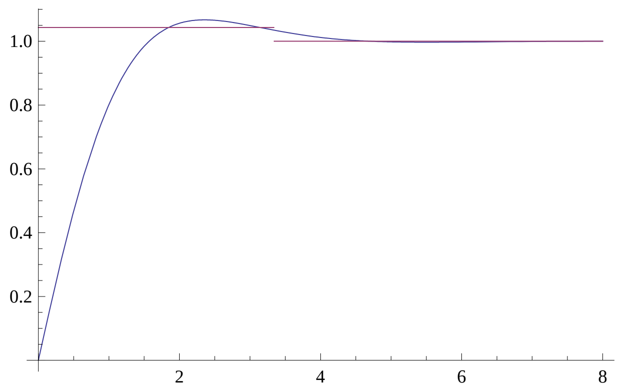

Figura 4: Respuesta a escalón sin pre-filtro

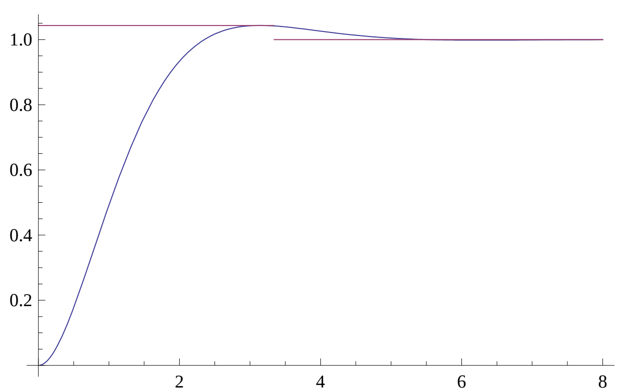

Figura 5: Respuesta a escalón con pre-filtro

La linealización en este punto nos proporciona

$$\begin{aligned}\delta\dot{x} &= \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u \\ \delta y &= \frac{\partial h}{\partial x}\delta x + \frac{\partial h}{\partial u}\delta u\end{aligned}$$

con $\frac{\partial f}{\partial x} = A$, $\frac{\partial f}{\partial u} = B$, $\frac{\partial h}{\partial x} = C$, $\frac{\partial h}{\partial u} = D$ evaluados en el punto de equilibrio (x^o, u_o) obteniendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2Ka^2u_o^2(x_1^o + a)^{-3} & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2K(a/(x_1^o + a))^2 u_o \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 + 3b(x_1^o)^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores numéricos son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.632456 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1.01403 & 0 \end{pmatrix}$$

y para la función de transferencia

$$G_p(s) = -\frac{0.202805}{s^2 - 0.632456}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

El sistema mecánico obedece la dinámica

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F$$

Transformando Laplace y resolviendo a condiciones iniciales nulas se obtiene

$$L[x] = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} L[F]$$

por tanto, la relación pedida se obtiene haciendo

$$L[\ddot{x}] = s^2 L[x] = \frac{s^2}{Ms^2 + Bs + K} F = G(s) L[F]$$

Si $F(t) = t\mathbf{1}(t)$ entonces $L[F(t)] = 1/s^2$ obteniéndose de esta guisa

$$L[\ddot{x}] = \frac{1}{Ms^2 + Bs + K}$$

El comportamiento en régimen permanente de $\ddot{x}$ a una entrada sinusoidal se calcula haciendo

$$Y_o = \mid G_p(j\omega) \mid,\ \psi_o = \angle G_p(j\omega)$$

con

$$
\begin{aligned}
Y_o &= \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{(K - M\omega^2)^2 + \omega^2 B^2}} \right)_{\omega=1} \\
\psi_o &= \arctan \left(\frac{\omega B}{K - \omega^2 M} \right)_{\omega=1}
\end{aligned}
$$

y así tendremos $\ddot{x}_{r.p.} = Y_o \sin(\omega t + \psi_o)$

Item n$^{\underline{\circ}}$ 5 (2 puntos)

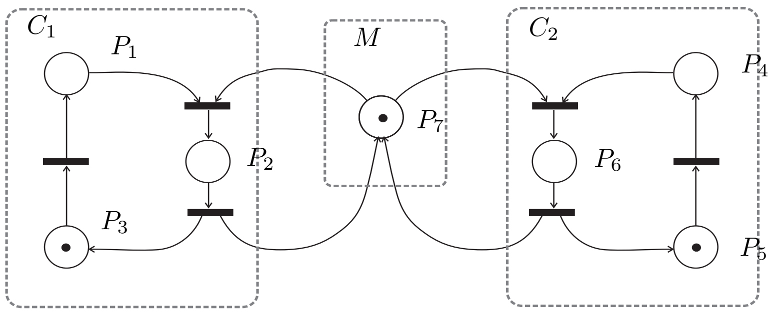

Figura 6: Red de Petri de la Memoria Compartida