EXAMEN
Regulación Automática
3º Minas

12 de diciembre de 2009

Item nº 1 (1 puntos)

Elaborar un controlador por realimentación de estados para la planta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de modo que en lazo cerrado exhiba sus polos en -3.

Item nº 2 (1 puntos)

Determinar la formulación entrada-salida (FT) $Y(s) = G(s)U(s)$ para la planta de la cuestión anterior

Item nº 3 (1 puntos)

Elaborar el modelo lineal (función de transferencia) que aproxima la planta no lineal en el punto operativo $u = 1$. La planta no lineal se rige por las ecuaciones:

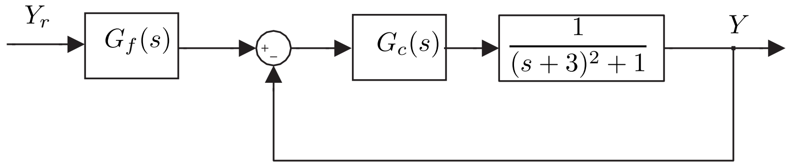
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x^3 - xu \\ y &= x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde u es la actuación o entrada, x el estado e y la salida. Escoger una linealización que sea controlable.

Item nº 4 (2 puntos)

Una planta con función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+3)^2 + 1}$$



debe ser estabilizada en lazo cerrado por el controlador $G_c(s)$ de modo que se verifique:

- Error nulo en régimen permanente en lazo cerrado, para entrada en escalón ($e(\infty) = 0$)
- Tiempo de asentamiento para 5 % de 3.34 [s].
- Sobreoscilación de 4.3 %.

Se pide:

- Determinar el controlador de lazo cerrado $G_c(s)$.
- Determinar el pre-filtro si necesario.

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (1 puntos)

Determine la respuesta a escalón unitario de la planta

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

en lazo cerrado con realimentación negativa.

Item n$^{\underline{o}}$ 6 (1 puntos)

La planta

$$G_p(s) = \frac{1}{(s-2)(s+2)}$$

debe estabilizarse con un controlador con la estructura

$$G_c(s) = K_c \frac{(s^2 + as + 1)}{s}$$

Determinar todos los valores de a, K_c que garantan la estabilidad en lazo cerrado.

Item n$^{\underline{o}}$ 7 (3 puntos)

Una célula de manufactura está formada por una cinta de transporte de llegada C_1, una cinta de transporte de salida C_2, un robot R, un almacén intermediario A de capacidad limitada a $n = 5$ unidades una máquina M_1 que efectúa una operación sobre las piezas que le colocan. El protocolo a seguir es el siguiente:

- Las piezas que llegan por la cinta C_1 deben ser depositadas por el robot R en el almacén A siempre y cuando haya vacante. En caso de que el almacén A esté lleno, un relé parará la cinta C_1. El estado de almacén lleno se detecta a través de un sensor S_o.

- La máquina M_1 recibirá piezas del almacén A manipuladas por el robot R.
- Una vez concluida la operación en la máquina M_1, el robot R debe colocar la pieza sobre la cinta C_2
- La cinta C_2 debe ser accionada apenas cuando transporta una pieza. Posee un sensor de peso S_p que detecta la presencia de la pieza.
- Si el almacén A queda vacío, suena un alarma B que se silenciará cuando le llegue alguna pieza.

Se pide elaborar una red de Petri que represente la automatización de la célula.

Fórmulas Útiles

$$
\begin{aligned}
SO &= e^{-\pi \tan\theta} \\
t_a &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{20}{\cos\theta}\right)
\end{aligned}
$$

1. Soluciones

Item n$^{\underline{o}}$ 1 (1 puntos)

Dado un sistema en la forma canónica

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

el sistema de lazo cerrado proveniente de la realimentación del estado de forma proporcional con

$$u = -\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & x_2 \end{pmatrix} u$$

queda:

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & x_2 \end{pmatrix} \right) x$$

o sea

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 - k_0 & a_1 - k_1 & a_2 - k_2 \end{pmatrix} x$$

cuyo polinomio característico es

$$p(s) = s^3 - (a_2 - k_2)s^2 - (a_1 - k_1)s - (a_0 - k_0)$$

se nos pide que el lazo cerrado posea los polos en $\{-3, -3, -3\}$ lo que implica en que el polinomio característico sea

$$p(s) = (s+3)^3 = s^3 + 9s^2 + 27s + 27$$

identificando los coeficientes tendremos:

$$\begin{array}{rcl} 9 & = & -a_2 + k_2 \\ 27 & = & -a_1 + k_1 \\ 27 & = & -a_0 + k_0 \end{array}$$

con $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

Item n$^{\underline{o}}$ 2 (1 puntos)

Para el sistema de la cuestión anterior tendremos las ecuaciones de estado:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ \dot{x}_3 & = & u \\ y & = & x_1 \end{array}$$

Efectuando substituciones tendremos

$$\dot{x}_3 = u = \ddot{x}_2 = y^{(3)}$$

Transformando Laplace para condiciones iniciales nulas obtendremos

$$U(s) = s^3 Y(s)$$

o sea

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 3 (1 puntos)

El punto nominal es un punto de equilibrio por tanto, $\ddot{x}_o = x_o^3 - x_o u_o = 0$. Si $u_o = 1$ entonces $x_o = \{0,\, -1,\, 1\}$

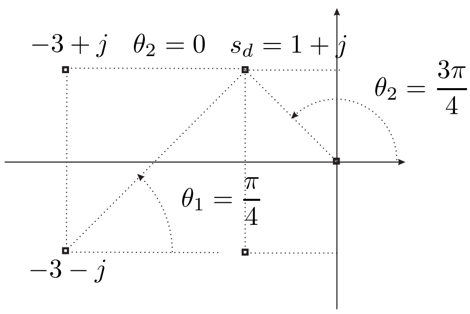
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & x^3 - xu \\ y & = & x^2 \end{array} \right. \Rightarrow \delta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \delta\ddot{x} & = & 3x_o^2\delta x - u_o\delta x \pm x_o\delta u \\ \delta y & = & \pm 2x_o\delta x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \delta\ddot{x} & = & 2\delta x \pm \delta u \\ \delta y & = & \pm 2\delta x \end{array} \right.$$

Aplicando Laplace se saca

$$\frac{\delta y(s)}{\delta u(s)} = G(s) = \frac{2}{s^2 - 2}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

Las condiciones de t_a y SO nos llevan a que los polos de lazo cerrado deben



estar ubicados en $s_d = -1 \pm j$. Debido a la condición de error nulo en régimen permanente para entrada en escalón debemos incorporar un polo en el origen de coordinadas o sea, consideraremos la función de transferencia de la planta en lazo abierto como

$$G_p'(s) = G_p(s)/s = \frac{1}{s((s+3)^2 + 1)}$$

Para saber el aporte de fase del compensador se hace:

$$\angle G'_c(s_d) = \pm\pi - \angle G'_p(s_d)$$

de donde resulta que $\angle G'_c(s_d) = 0$ pues $\angle G'_p(s_d) = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = -\pi$. El compensador quedará siendo entonces

$$G'_c(s) = k_c$$

La determinación de k_c es inmediata:

$$|G'_c(s_d)| \left|G'_p(s_d)\right| = 1 \Rightarrow k_c = \frac{1}{\left|G'_p(s_d)\right|} = |s_d|\,|s_d + 3 + j|\,|s_d + 3 - j| = 8$$

El controlador será entonces

$$G_c(s) = \frac{8}{s}$$

La función de transferencia de lazo cerrado queda

$$G_{lc}(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{k_c}{s((s+3)^2+1) + k_c} = \frac{k_c}{(s+p)((s+1)^2+1)}$$

de donde se concluye que es necesario el pre-filtro

$$G_f(s) = \frac{2}{k_c}(s+p) = \frac{s+4}{4}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (1 puntos)

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$G(s) = \frac{G_p(s)}{1+G_p(s)} = \frac{s+1}{s^2+6s+7} = \frac{s+1}{(s+3+\sqrt{2})(s+3-\sqrt{2})}$$

La respuesta a escalón unitario de la planta

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+3+\sqrt{2})(s+3-\sqrt{2})}$$

se hace determinando la anti-transformada de

$$G(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3+\sqrt{2}} + \frac{C}{s+3-\sqrt{2}}$$

o sea

$$y(t) = (A + Be^{(-3-\sqrt{2})t} + Ce^{(-3+\sqrt{2})t})\mathbf{1}(t)$$

el cálculo de A, B y C se hace por residuos

$$A = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s},\ B = \lim_{s\to -3-\sqrt{2}} (s+3+\sqrt{2})G(s)\frac{1}{s},\ C = \lim_{s\to -3+\sqrt{2}} (s+3-\sqrt{2})G(s)\frac{1}{s}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 6 (1 puntos)

La planta $G_p(s)$ en lazo cerrado con el controlador $G_c(s)$ posee como función de transferencia de lazo cerrado

$$G(s) = \frac{K_c(s^2 + as + 1)}{s(s^2 - 4) + K_c(s^2 + as + 1)}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(s) = s^3 + K_c s^2 + (aK_c - 4)s + K_c$$

El criterio de Routh nos proporciona

$$\begin{array}{c|c|c} 3 & 1 & aK_c - 4 \\ 2 & K_c & K_c \\ \hline\hline 1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{array}$$

con $b_1 = -\dfrac{1}{K_c}\begin{vmatrix} 1 & aK_c - 4 \\ K_c & K_c \end{vmatrix}$, $c_1 = -\dfrac{1}{b_1}\begin{vmatrix} K_c & aK_c \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} = K_c$ los valores de K_c que estabilizan la planta son los que obedecen

$$\begin{array}{ccccc} K_c & > & 0 & & a > 0 \\ b_1 & > & 0 & & aK_c > 5 \end{array}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 7 (2 puntos)

Una posible realización. No se utilizaron los sensores S_o y S_p. En la presente realización se utiliza un procedimiento de parada de C_1, ($\bar{C}_1$) asociado a S_o, que podría incluirse también en la cinta C_2. Es digna de nota la utilización del arco negado como sucedáneo de S_o.