

Examen de Regulación Automática I – 3^o Minas

15 de diciembre de 2008

Item n.º 1 (2 puntos)

Dado el modelo dinámico de un motor de CC acoplado a una carga a través de un eje elástico, cuyas ecuaciones de dinámica se exhiben a seguir,

$$E = R_a i_a + e_b \quad \text{Circuito eléctrico}$$

$$\begin{aligned} e_b &= K_m \omega_m \\ \tau_m &= K_m i_a \end{aligned} \quad \text{Motor CC}$$

$$(\omega = \dot{\theta})$$

$$\begin{aligned} J_m \dot{\omega}_m &= \tau_m - K(\theta_m - \theta_L) - B_m \omega_m \\ J_L \dot{\omega}_L &= -K(\theta_L - \theta_m) \end{aligned} \quad \text{Mecánica del motor y de la carga}$$

se pide:

1. Elabore la función de transferencia $G_p(s) = \Theta_L(s)/E(s)$.
2. Cerrar el lazo incluyendo un controlador P equivalente a la relación $E(t) = K_p(\theta_R(t) - \theta_L(t))$ y determinar $G_{lc}(s) = \Theta_L(s)/\Theta_R(s)$.
3. ¿Cuál el rango de valores de K_p que mantienen la planta estable en lazo cerrado?

$$K_m = 2, R_a = 1, J_m = 1, J_L = 10, B_m = 1, K = 10;$$

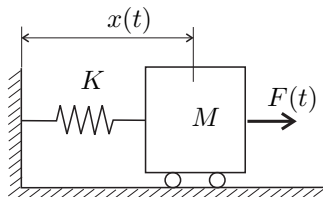


Figura 1: Masa-Muelle

Item n^o 2 (2 puntos)

Para el sistema mecánico conforme figura 1 se requiere:

- Proponer un modelo dinámico (ecuación diferencial) que lo represente a sabiendas que debe considerarse como entrada $F(t)$ y como salida la posición $x(t)$.
- Establecer un lazo cerrado generando $F(t)$ de acuerdo con una ley del tipo $F(t) = K_p(x_r - x(t)) + K_d(\dot{x}_r - \dot{x}(t))$ de modo a llevar la masa para la posición x_r .
- Determinar K_p , K_d de modo que el movimiento de la masa M para el punto x_r se efectúe sin sobreoscilaciones.
- Incorporar pre-filtro si necesario.
- Si se aplica a la planta en lazo abierto la señal $F(t) = \sin((\sqrt{K/M})t)$ ¿cual es la salida?
- ¿Cual el valor de K_d que proporciona la excursión de $x(t)$ a x_r en el menor tiempo?

Item n^o 3 (2 puntos)

Elaborar el modelo lineal que aproxima la planta no lineal presentada en el diagrama de la figura 2 La planta no lineal se rige por las ecuaciones:

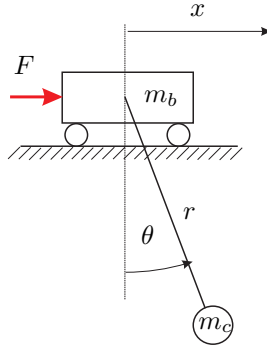


Figura 2: Puente-Grúa

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= \frac{m_b \sin \theta (g \dot{\theta}^2 \cos \theta + r)}{m_c + m_b \sin^2 \theta} + \frac{F}{m_c + m_b \sin^2 \theta} \\
 \ddot{\theta} &= -\frac{\sin \theta (g(m_b + m_c) + r m_b \dot{\theta}^2 \cos \theta)}{r(m_c + m_b \sin^2 \theta)} - \frac{\cos \theta F}{r(m_c + m_b \sin^2 \theta)} \\
 y &= x
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde g es la constante de la aceleración de la gravedad, F la fuerza de control, m_b , m_c , r son constantes, x , θ variables, siendo y la salida medida. El punto operativo será establecido para la posición vertical de equilibrio ($\theta = 0$, $x = 0$).

Item n^o 4 (2 puntos)

Se pide elaborar un controlador para la planta cuya gráfica de bode se muestra en la figura 3 de modo que se alcance el margen de fase de 45° .

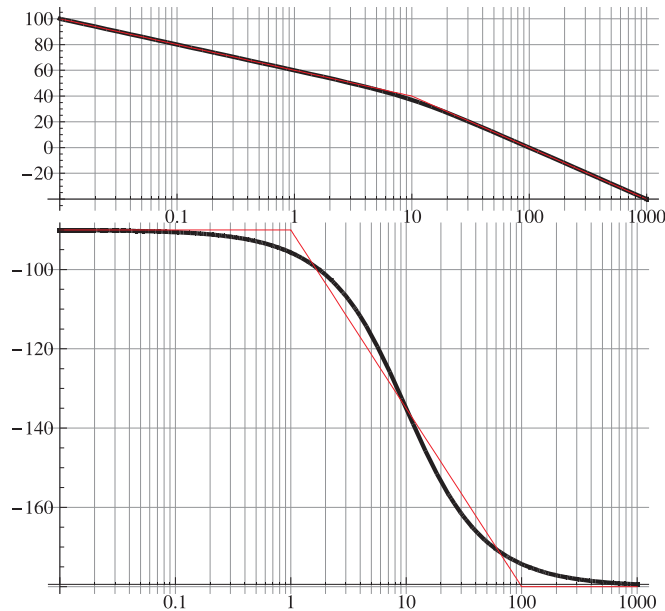


Figura 3: Diagrama de bode (módulo y fase) de la planta del problema 4

Item n^o 5 (2 puntos)

Se quiere automatizar el proceso de funcionamiento de una ventanilla tipo guillotina que abre y cierra a través del comando de dos botones (b_a apertura, b_c cierre). La operación de la ventanilla debe estar de acuerdo con las reglas:

- La apertura se efectúa a través de un motor que puede estar en tres estados (m_p parado, m_a , abriendo, m_c , cerrando).
- Hay dos detectores fin de carrera (f_a completamente abierto, f_c completamente cerrado) que cuando activados paran el motor.
- Se dispone de un sensor de esfuerzo (d_e) que se activa cuando algún objeto intercepta el proceso de cierre. En este caso se activa el detector y se procede a la apertura completa de la ventanilla, seguida de la parada del motor.

Se pide elaborar una red de Petri que represente el funcionamiento de la ventanilla.

Soluciones

Cuestión 1

Transformando Laplace

$$\begin{aligned} e_b &= sK_m\Theta_m \\ (J_ms^2 + B_ms + K)\Theta_m &= K_m(E - e_b)/R_a + K\Theta_L \\ (J_ms^2 + K)\Theta_L &= K\Theta_m \end{aligned}$$

de donde se saca

$$\begin{aligned} \Theta_m &= ((J_ms^2 + K)/K)\Theta_L \\ (J_ms^2 + (B_m + K_m^2/R_a)s + K)\Theta_m &= (K_m/R_a)E + K\Theta_L \end{aligned}$$

(en este punto es conveniente efectuar la substitución por los valores numéricos para no liarse)

$$G_p(s) = \frac{\Theta_L}{E} = \frac{KK_m/R_a}{(J_ms^2 + K)(J_ms^2 + (B_m + K_m^2/R_a)s + K) - K^2}$$

siendo que

$$G_{lc}(s) = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)} = \frac{K_p KK_m/R_a}{(J_ms^2 + K)(J_ms^2 + (B_m + K_m^2/R_a)s + K) - K^2 + K_p KK_m/R_a}$$

El polinomio responsable por la estabilidad es:

$$p(s) = 10(2K_p + 5s + 11s^2 + 5s^3 + s^4)$$

y el arreglo de Routh queda:

$$\begin{array}{c|c|c|c} 4 & 1 & 11 & 2K_p \\ 3 & 5 & 5 & 0 \\ \hline 2 & b_3 & b_0 & 0 \\ 1 & c_3 & c_0 & 0 \\ 0 & d_3 & d_0 & 0 \end{array}$$

con

$$b_3 = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}, \quad b_0 = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2K_p \\ 5 & 0 \end{vmatrix}, \quad c_3 = -\frac{1}{10} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 2K_p \end{vmatrix}, \quad d_3 = 3K_p$$

de donde sacamos $0 < K_p < 5$

Cuestión 2

Para la planta en lazo abierto el modelo es:

$$M\ddot{x} + Kx = F(t)$$

Aplicándose el controlador se tiene:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = K_p(x_r - x(t)) + K_d(\dot{x}_r - \dot{x}(t))$$

agrupando se obtiene:

$$M\ddot{x}(t) + K_d\dot{x}(t) + (K + K_p)x(t) = K_px_r + K_d\dot{x}_r$$

transformando Laplace se obtiene:

$$\frac{X(s)}{X_r(s)} = G_{lc}(s) = \frac{K_p + sK_d}{Ms^2 + K_ds + K + K_p}$$

Para que el sistema no sobreoscile es suficiente que las raíces de $Ms^2 + K_ds + K + K_p = 0$ sean reales y negativas. Esta condición se resume a:

$$K_d^2 - 4(K + K_p) \geq 0$$

siendo que la condición de tiempo mínimo se consigue con la igualdad.

Si se quiere que el error de seguimiento de consigna para entrada en escalón sea nulo es necesaria la contribución del pre-filtro

$$G_f(s) = \frac{K + K_p}{K_p + sK_d}$$

Aplicándose $F(t) = \sin\left(\frac{K}{M}t\right)$ a la planta en lazo abierto, la planta entra en resonancia.

Cuestión 3

Haciendo $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, $|\dot{\theta}| \ll 1$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta\ddot{x} &= \frac{m_br}{m_c}\delta\theta + \frac{\delta F}{m_c} \\ \delta\ddot{\theta} &= -\frac{g(m_b + m_c)}{rm_c}\delta\theta - \frac{\delta F}{rm_c} \\ \delta y &= \delta x \end{aligned} \tag{2}$$

de donde se saca la formulación:

$$\begin{aligned} \delta X &= \begin{pmatrix} \delta x & \delta\dot{x} & \delta\theta & \delta\dot{\theta} \end{pmatrix} \\ \delta\dot{X} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_b}{rm_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{g(m_b + m_c)}{rm_c} & 0 \end{pmatrix} \delta X + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_c} \\ 0 \\ -\frac{1}{rm_c} \end{pmatrix} \delta U \\ \delta Y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta X \end{aligned}$$

o también transformando Laplace

$$\left. \begin{aligned} s^2 X(s) &= \frac{m_br}{m_c}\Theta(s) + \frac{F(s)}{m_c} \\ s^2 \Theta(s) &= -\frac{g(m_b + m_c)}{rm_c}\Theta(s) - \frac{F(s)}{rm_c} \\ Y(s) &= X(s) \end{aligned} \right\} \Rightarrow G_p(s) = \frac{m_crs^2 + g(m_b + m_c) - m_br}{s^2(m_crs^2 + g(m_b + m_c))m_c}$$

Cuestión 4

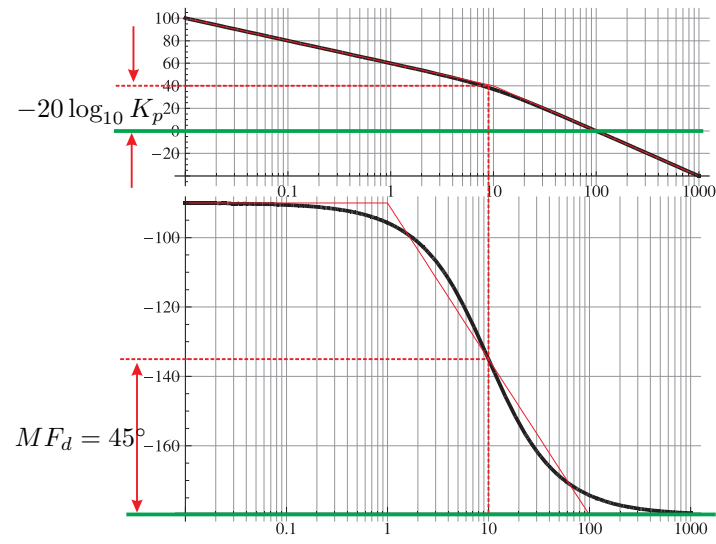


Figura 4: Solución al problema 4

De la gráfica se saca

$$20 \log_{10} K_p = -40 \Rightarrow K_p = 10^{-2}$$

Cuestión 5

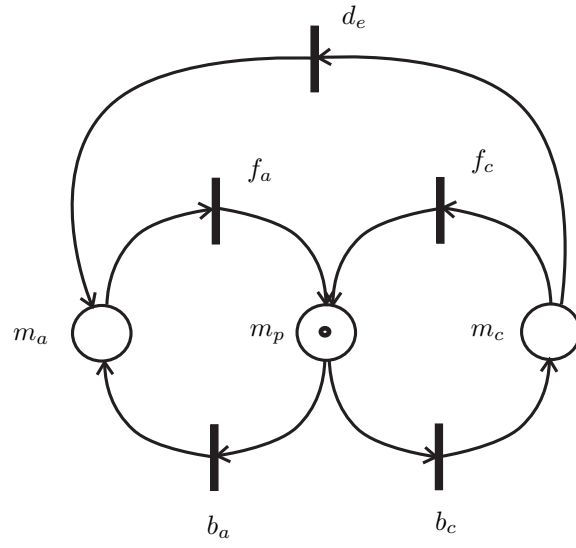


Figura 5: Una Solución al problema 5