EXAMEN
Regulación Automática
3º Minas

19 de junio de 2009

Item nº 1 (1 puntos)

Elaborar un controlador por realimentación de estados para la planta

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

de modo que en lazo cerrado exhiba sus polos en -10, $-3 \pm 2j$.

Item nº 2 (1 puntos)

Determinar la formulación entrada-salida (FT) $Y(s) = G(s)U(s)$ para la planta de la cuestión anterior

Item nº 3 (2 puntos)

Elaborar el modelo lineal que aproxima la planta no lineal presentada en el diagrama de la figura 2 La planta no lineal se rige por las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= g - K\left(\frac{u}{x_1}\right)^2 \\
y &= x_1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde g el la constante de la aceleración de la gravedad, u la corriente de control, $K = 1$, $g = 10$ son constantes, x_1, x_2 el estado y la salida medida. El punto operativo será establecido para una corriente nominal $u_o = 1$.

Item nº 4 (2 puntos)

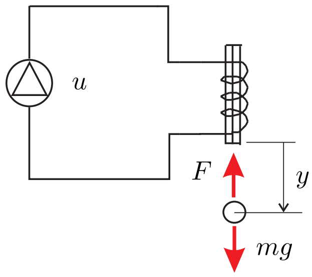

Figura 1: Diagrama del levitador magnético

Una planta con función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+10)(s+5)}$$

debe ser estabilizada en lazo cerrado de modo a exhibir las prestaciones

- Error nulo en régimen permanente para entrada en escalón ($e(\infty) = 0$)
- Sobreoscilación máxima permitida $SO \leq 4.3\,\%$.
- Tiempo de asentamiento $t_a \leq 3.34$[s].

Se pide:

- ¿Cual es la ubicación del par de polos de lazo cerrado (s_d) que proporciona estas especificaciones?
- ¿Cual es el aporte en fase de $G_c(s)$ necesario para garantizar la pertenencia de s_d al lugar de raíces de $G_c(s)G_p(s)$?
- ¿Cual el compensador más sencillo que proporciona las prestaciones requeridas? (Calcularlo).
- ¿Es necesario incorporar pre-filtro? En caso afirmativo calcularlo.

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (1 puntos)

Haga un dibujo de la respuesta a escalón unitario de la planta

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 6 (1 puntos)

La planta

$$G_p(s) = \frac{(s+1)}{(s-2)(s+3)}$$

debe estabilizarse con un controlador con la estructura

$$G_c(s) = K_c\frac{(s+4)}{s}$$

Determinar los valores de K_c que garantizan estabilidad en lazo cerrado.

Item n$^{\underline{o}}$ 7 (2 puntos)

Se quiere automatizar un un horno de calentamiento de una *vending machine*. Esta máquina sirve tres tipos de producto: bocadillos, mini-pizzas y lasañas. Los productos están almacenados a una temperatura lo suficientemente baja para permitir su conservación durante un cierto período de tiempo. Así que una vez escogido el producto a servir por intervención del cliente a través de un pulsador individual para cada tipo, el producto debe ser calentado a una temperatura adecuada para su consumición.

- Los tres productos están apilados en tres filas.
- El producto escogido deberá ser calentado en el horno de rayos infra-rojos que la máquina dispone, siendo que el tiempo de calentamiento es distinto para cada producto: bocadillo 10[s], mini-pizza 15[s] y lasagna 20[s].
- El horno solo puede calentar un producto de cada vez.
- Una vez calentado el producto, se abre una compuerta de servicio por la que se accede al producto.

Se pide elaborar una red de Petri que represente la utilización del horno de la *vending machine*.

Fórmulas Útiles

$$\begin{aligned} SO &= e^{-\pi \tan\theta} \\ t_a &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{20}{\cos\theta}\right) \end{aligned}$$

1. Soluciones

Item n$^{\underline{o}}$ 1 (1 puntos)

Dado un sistema en la forma canónica

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

el sistema de lazo cerrado proveniente de la realimentación del estado de forma proporcional con

$$u = -\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & x_2 \end{pmatrix} u$$

queda:

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & x_2 \end{pmatrix}\right) x$$

o sea

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 - k_0 & a_1 - k_1 & a_2 - k_2 \end{pmatrix} x$$

cuyo polinomio característico es

$$p(s) = s^3 - (a_2 - k_2)s^2 - (a_1 - k_1)s - (a_0 - k_0)$$

se nos pide que el lazo cerrado posea los polos en -10, $-3 \pm 2j$ lo que implica en que el polinomio característico sea

$$p(s) = (s + 10)[(s + 3)^2 + 2^2] = s^3 + 16s^2 + 75s + 130$$

identificando los coeficientes tendremos:

$$\begin{aligned} 16 &= -a_2 + k_2 \\ 75 &= -a_1 + k_1 \\ 130 &= -a_0 + k_0 \end{aligned}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 2 (1 puntos)

Para el sistema de la cuestión anterior tendremos las ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 + x_3 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Efectuando substituciones tendremos

$$\dot{x}_3 = y - \dot{y} + \ddot{y} + u = \ddot{x}_2 = y^{(3)}$$

Transformando Laplace para condiciones iniciales nulas obtendremos

$$(1 - s + s^2)Y(s) + U(s) = s^3 Y(s)$$

o sea

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 - s^2 + s - 1}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 3 (1 puntos)

Los puntos de equilibrio obedecen $\dot{x} = 0 \Rightarrow \{x_1^o = \sqrt{\frac{K}{g}} u,\ x_2^o = 0\}$ entonces

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\left(\sqrt{\frac{g}{K}}\right)\frac{g}{u} & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2g}{u} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 4 (2 puntos)

Debido a las prestaciones exigidas, la planta siendo de tipo 0, necesitará la ayuda de un controlador que le proporcione un polo 0. De esta guisa consideraremos una planta ampliada que será

$$G_p'(s) = \frac{1}{s(s+10)(s+5)}$$

Las prestaciones de tiempo de asentamiento y sobreoscilación imponen la presencia de un par de polos de lazo cerrado en $s_d = -\alpha \pm j\beta = -1 \pm j$ con lo cual la fase aportada por el controlador será

$$\angle G_c(s_d) = \pm 180^o + \angle s_d^o + \angle(s_d+10)^o + \angle(s_d+5)^o \approx -180^o + 90^o + 45^o + 14^o + 6^o = -25^o$$

Para obtener aporte negativo se require la contribución de un polo o un PI. Analizaremos el primer caso. Tomemos un polo en $-p + j0$ tal que verifique:

$$\angle(s_d + p)^o = 25^o \Rightarrow \frac{1}{p-1} = \tan(25^o) \Rightarrow p = \frac{1+\tan(25^o)}{\tan(25^o)} \approx 3.14$$

el controlador queda

$$G_c(s) = k_c \frac{1}{s(s+3.14)}$$

la determinación de k_c se efectúa según

$$\mid G_c(s_d)G_p(s_d) \mid = 1 \Rightarrow k_c = \mid s_d + 5 \mid \cdot \mid s_d + 10 \mid \cdot \mid s_d \mid \cdot \mid s_d + 3.14 \mid = 124.723$$

El pre-filtro se determina analizando la función de transferencia de lazo cerrado

$$G(s) = \frac{k_c}{s(s+p)(s+5)(s+10)+k_c} = \frac{k_c}{(s^2+c_1 s + c_2)((s+\alpha)^2+\beta^2)}$$

donde $s_d = -\alpha \pm j\beta$. El pre-filtro asume la forma

$$G_f(s) = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(s^2+c_1 s+c_2)}{k_c}$$

En el segundo caso, adoptaremos el PI $k_c \frac{s+z}{s}$ cuyo z se calcula de modo que

$$\alpha - z = \beta \tan(\theta - 25^o)$$

de donde $z = 1 - \tan(20^o)$. La determinación de k_c sigue de modo análogo al caso de un polo. La estructura del controlador final en este caso será

$$PII = k_c \frac{(s+z)}{s^2}$$

Lo interesante de este controlador es que permite el seguimiento de consignas en rampa con error nulo en régimen permanente. El pre-filtro ahora será determinado como sigue:

$$G(s) = \frac{k_c(s+z)}{s^2(s+5)(s+10)+k_c(s+z)} = \frac{k_c(s+z)}{((s+\alpha)^2+\beta^2)(s^2+c_1s+c_2)}$$

de donde se concluye que el pre-filtro es

$$G_f(s) = \frac{(\alpha^2+\beta^2)}{k_c}\frac{(s^2+c_1s+c_2)}{(s+z)}$$

Item n$^{\underline{o}}$ 5 (1 puntos)

El dibujo de la respuesta a escalón unitario de la planta

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

se hace determinando la anti-transformada de

$$G(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}$$

o sea

$$y(t) = (At + B + Ce^{-2t} + De^{-3t})\mathbf{1}(t)$$

el cálculo de C y D se hace por residuos

$$C = \lim_{s\to-2}(s+2)G(s)\frac{1}{s} = -1/4,\ D = \lim_{s\to-3}(s+3)G(s)\frac{1}{s} = 2/9$$

El valor de B se calcula por el teorema del valor inicial

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s)\frac{1}{s} = A\times 0 + B + C\times 1 + D\times 1 = B - 1/4 + 2/9 = 0$$

¿Como se calcula A? Pista: $\dot{y}(0) = A - 2C - 3D$

Item n$^{\underline{o}}$ 6 (1 puntos)

La planta $G_p(s)$ en lazo cerrado con el controlador $G_c(s)$ posee como función de transferencia de lazo cerrado

$$G(s) = \frac{K_c(s+4)(s+1)}{(s-2)(s+3)s + K_c(s+4)(s+1)}$$

cuyo polinomio característico es

$$p(s) = s^3 + (K_c+1)s^2 + (5K_c-6)s + 4K_c$$

El criterio de Routh nos proporciona

$$\begin{array}{c|c|c}
3 & 1 & 5K_c - 6 \\
2 & K_c + 1 & 4K_c \\
\hline\hline
1 & b_1 & 0 \\
0 & c_1 & 0
\end{array}$$

con $b_1 = -\dfrac{1}{K_c+1}\begin{vmatrix} 1 & 5K_c - 6 \\ K_c + 1 & 4K_c \end{vmatrix}$, $c_1 = -\dfrac{1}{b_1}\begin{vmatrix} K_c + 1 & 4K_c \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} = 4K_c$
los valores de K_c que estabilizan la planta son los que obedecen

$$\begin{array}{lcll}
K_c + 1 & > & 0 & K_c > -1 \\
b_1 & > & 0 & (5K_c - 6)(K_c + 1) - 4K_c > 0 \\
c_1 & > & 0 & 4K_c > 0
\end{array}$$

de donde se saca $K_c > 1.7$

Item n$^{\underline{o}}$ 7 (1 puntos)

Aquí p_b, p_p, p_l representan los pulsadores para selección de productos y T_b, T_p, T_l son los temporizadores asociados al calentamiento de cada producto. La para evitar ambigüedad en la captación de la marca cuando se pulsen simultáneamente dos de los pulsadores p_b, p_p, p_l, se puede asociar prioridad a las transiciones.

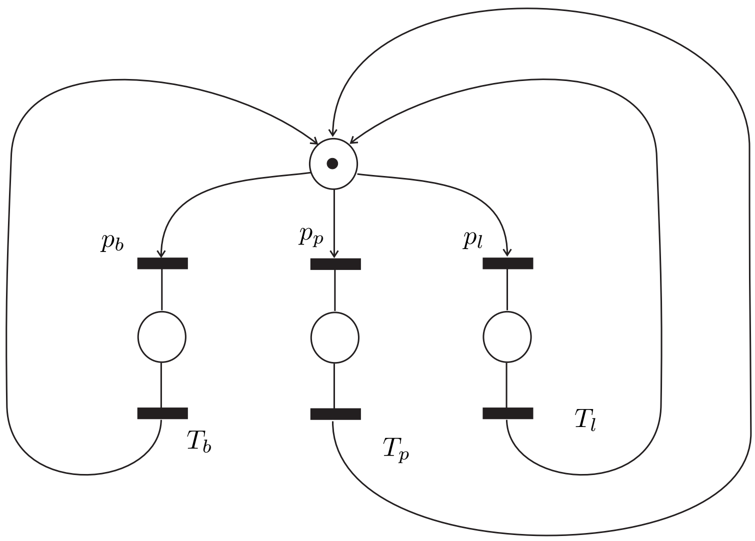

Figura 2: Una posible Red de Petri