

EXAMEN

Regulación Automática

3^o Minas

21 de diciembre de 2006

Item n^o 1 (2 puntos)

Una planta tiene como función de transferencia:

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2(s+10)(s+100)}$$

Se desea que el conjunto regulado (lazo cerrado) tenga las prestaciones:

- Error nulo ($e(\infty)$) en régimen permanente para entrada en escalón.
- Sobreoscilación máxima (SO) en la respuesta a escalón de 4.32 %.
- Tiempo de asentamiento (t_a) dentro de 5 % del valor final, de 3.34 [s].

En estas condiciones se pide:

- ¿Dónde debe ubicarse el par de polos de lazo cerrado (s_d) para que se cumplan las condiciones requeridas?
- ¿Cuál el aporte de fase con que debe contribuir el compensador?
- Calcular el compensador.
- ¿Es necesario pre-filtro? En caso afirmativo mostrar su estructura.

Item n^o 2 (2 puntos)

La dinámica de un anillo de masa m que desliza sin rozamiento a lo largo del aro de radio R que está girando con velocidad angular ω en torno al eje vertical conforme figura (1) es:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{R} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

donde g es la aceleración gravitatoria. Nos interesa observar θ en función de ω . Calcular el modelo lineal con la estructura $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ en un entorno del punto operativo $g = 10$, $R = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

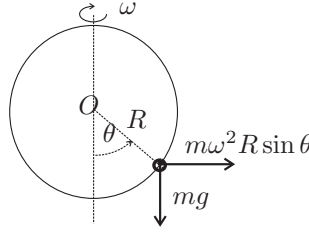


Figura 1: Órbita anular

Item n.º 3 (2 puntos)

Dado el sistema con función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

se desea saber:

- Efectuar la representación asintótica de Bode.
- Estableciendo un lazo de realimentación unitaria negativa, cual el margen de fase (MF) aproximado del arreglo ?
- Se desea un margen de fase de 60° . Determinar un compensador que estabilice la planta en las condiciones exigidas.
- Si se aplica a entrada del lazo cerrado con realimentación unitaria negativa una señal $y_r(t) = \sin(t)\mathbf{1}(t)$ ¿Cual la respuesta en regimen permanente?

Item n.º 4 (2 puntos)

Relativamente a la figura (2) donde todos los coeficientes ($K, K_m, T, J, K_t, \alpha$) son positivos, se desea:

- Elaborar la función de transferencia $\Theta(s)/\Theta_r(s)$.
- Elaborar la función de transferencia $\Theta(s)/\tau_d(s)$.
- Verificar cuales valores de K estabilizan el lazo cerrado.
- Calcular la expresión del error en régimen permanente para entrada en rampa unitaria en la consigna, en función de los parámetros del sistema. (Suponer $\tau_d(t) = 0$)
- Calcular la excursión del ángulo de salida en régimen permanente para una perturbación $\tau_d(t)$ en la forma de un escalón unitario. (Suponer $\theta_r(t) = 0$).

Item n.º 5 (2 puntos)

En la figura 3 se representa un arreglo con dos depósitos en la vertical servidos por tres electro-válvulas (V_0, V_1, V_2). Cada depósito (D_1, D_2) tiene dos detectores que indican nivel máximo $a_i, \{i = 1, 2\}$ (depósitos completos $a_i = 1$), e nivel mínimo

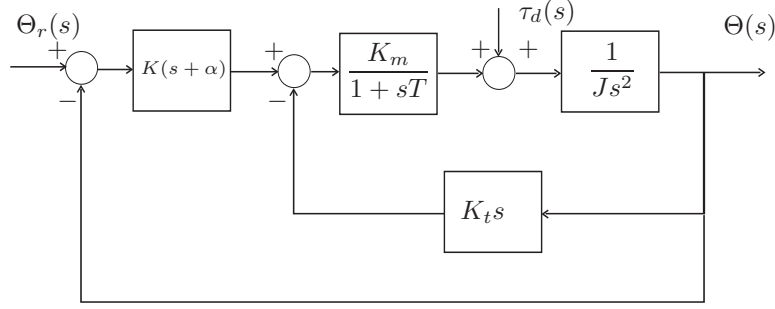


Figura 2: Lazo de regulación de un motor DC

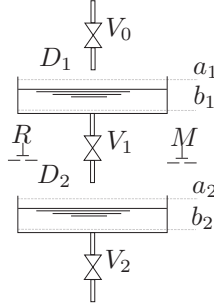


Figura 3: Depósitos verticales

$b_i, \{i = 1, 2\}$ (depósitos vacíos $b_i = 1$). Partiendo de una condición en que los dos depósitos están vacíos ($a_1 = 0, b_1 = 1, a_2 = 0, b_2 = 1$) y las tres válvulas cerradas, el funcionamiento del arreglo deberá efectuarse en conformidad a las siguientes reglas: después de pulsar el contacto M

- V_0 se abre si $b_1 = 1$ y se cierra si $a_1 = 1$.
- V_1 se abre si $b_2 = 1$ y se cierra si $a_2 = 1$.
- V_2 se abre si $a_2 = 1$ y se cierra si $b_2 = 1$.

después de pulsar el contacto R

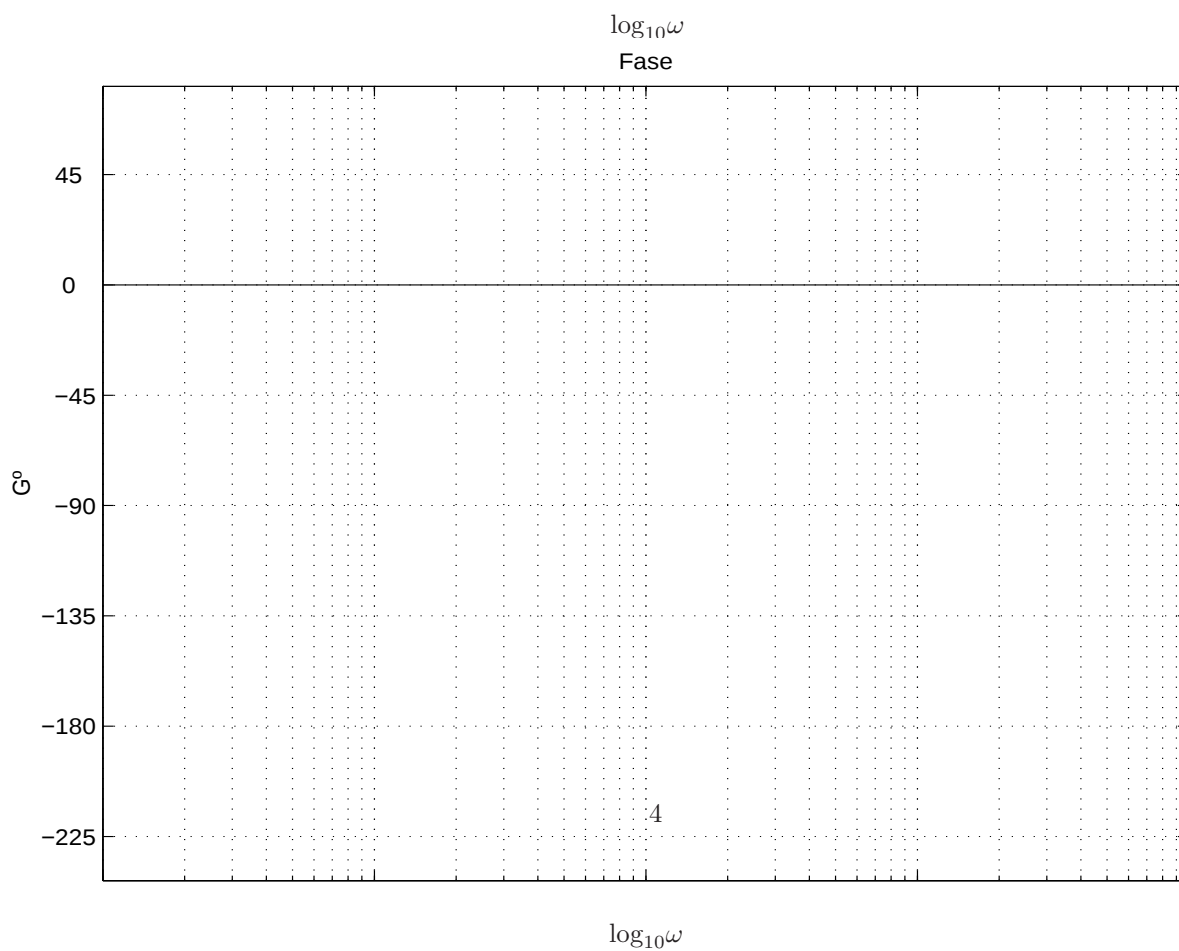
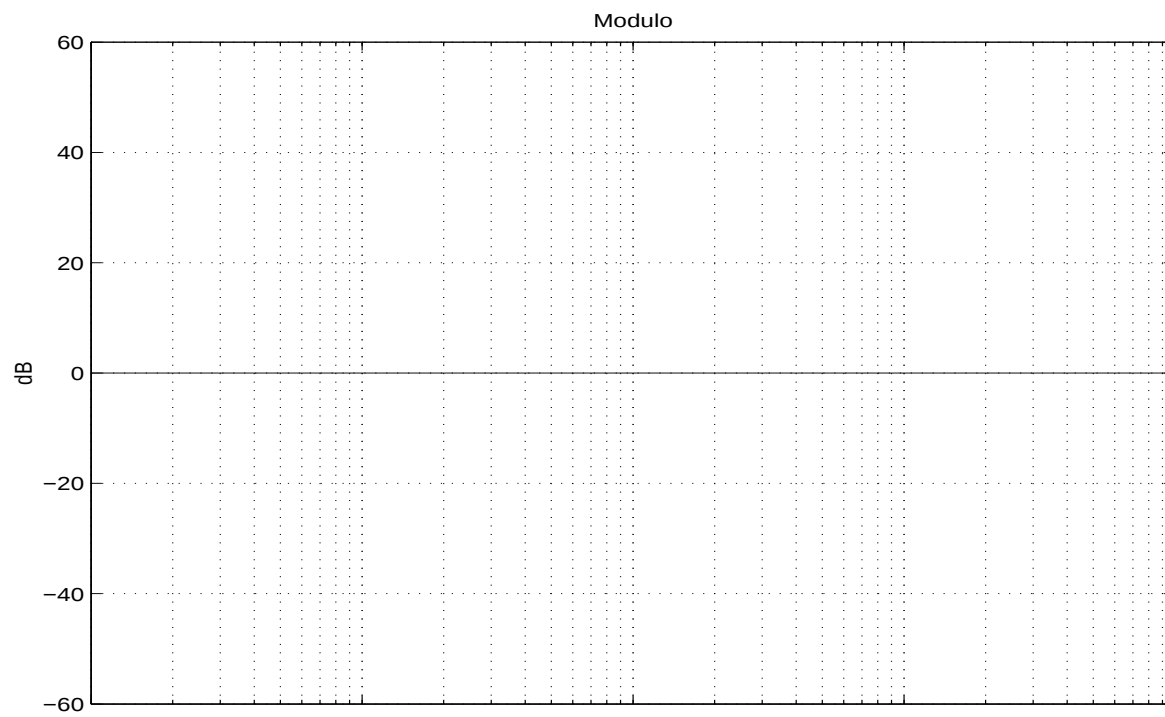
- se cierra V_2 .
- V_1 se cierra si $a_2 = 1$.
- V_0 se cierra si $a_1 = 1$.

Se pide: Elaborar una red de petri que represente la operación concurrente del sistema de depósitos.

Fórmulas Útiles

$$SO = e^{-\pi \tan \theta}$$

$$t_a = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{20}{\cos \theta} \right)$$



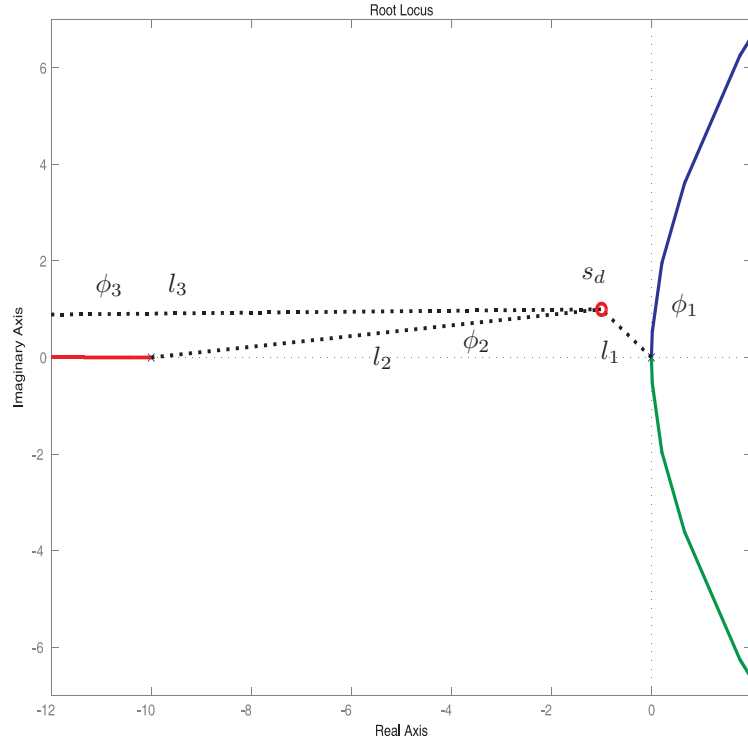


Figura 4: Lugar de raíces

1. Soluciones

Cuestión 1

- Error nulo ($e(\infty)$) en régimen permanente para entrada en escalón. La planta al ser de tipo 2 ya tiene asegurado este comportamiento.
- Sobreoscilación máxima (SO) en al respuesta a escalón de 4.32 %.

$$0.0423 = e^{-\pi \tan \theta} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

- Tiempo de asentamiento (t_a) dentro de 5 % del valor final, de 3.34 [s].

$$3.34 = \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{20}{\cos \theta} \right) \Rightarrow \alpha = 1$$

de donde se saca $s_d = -1 + i$. El lugar de raíces de la planta sin compensar puede observarse en la figura (4)

- ¿Donde debe ubicarse el par de polos de lazo cerrado (s_d) para que se cumplan las condiciones requeridas?

$$s_d = -1 + i$$

- ¿Cual el aporte de fase con que debe contribuir el compensador?

$$\phi_1 = 90^\circ + 45^\circ, \phi_2 \approx 5^\circ, \phi_3 \approx 0 \Rightarrow \angle G_p(s_d) \approx -2\phi_1 - \phi_2$$

$$\angle G_c(s_d) = \pm 180^\circ - \angle G_p(s_d) = -180^\circ + 180^\circ + 90^\circ + 5^\circ = 95^\circ$$

- Calcular el compensador.
Es un adelantador. Puede escogerse un PD con la estructura

$$G_c(s) = k_c(s + z)$$

donde $-z = -\alpha + \tan(5^\circ) = -1 + 0.0875 = -0.9125$. Para el cálculo de k_c :

$$|G_c(s_d)G_p(s_d)| = 1 = k_c \frac{|s_d + z|}{|s_d|^2 |s_d + 10| |s_d + 100|} \Rightarrow k_c = \frac{l_1^2 l_2 l_3}{|s_d + z|}$$

- ¿Es necesario pre-filtro? En caso afirmativo mostrar su estructura.
La función de transferencia de lazo cerrado resulta

$$G(s) = \frac{k_c(s + z)}{s^2(s + 10)(s + 100) + k_c(s + z)}$$

dos raíces del denominador se conocen o sea:

$$s^2(s + 10)(s + 100) + k_c(s + z) = [(s + 1)^2 + 1](s + p_1)(s + p_2)$$

por tanto

$$G(s) = \frac{k_c(s + z)}{2(s + p_1)(s + p_2)} \frac{2}{(s + 1)^2 + 1}$$

y el pre-filtro es:

$$G_f(s) = \frac{2(s + p_1)(s + p_2)}{k_c(s + z)}$$

Después de la compensación el lugar de raíces asume la forma de la figura (5)

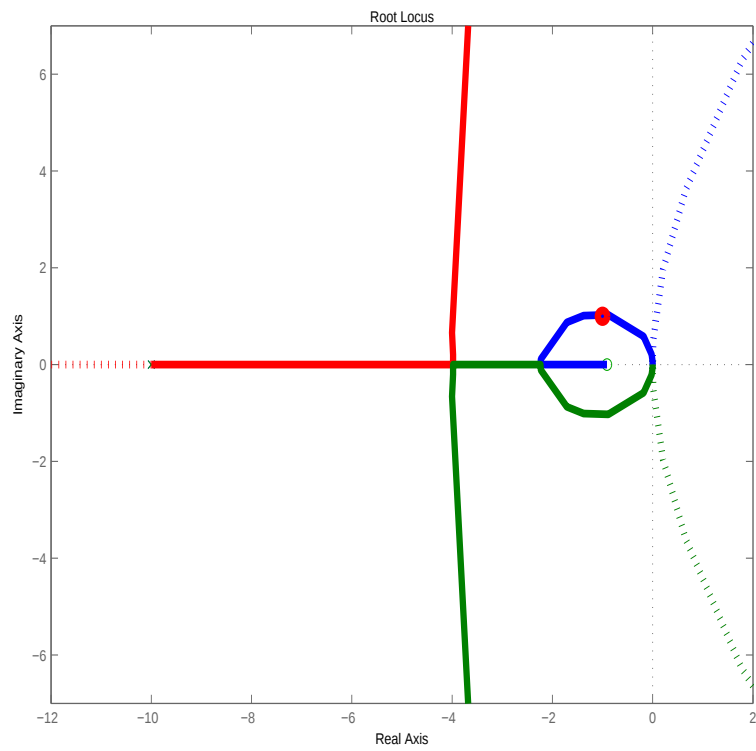


Figura 5: Lugar de raíces compensado

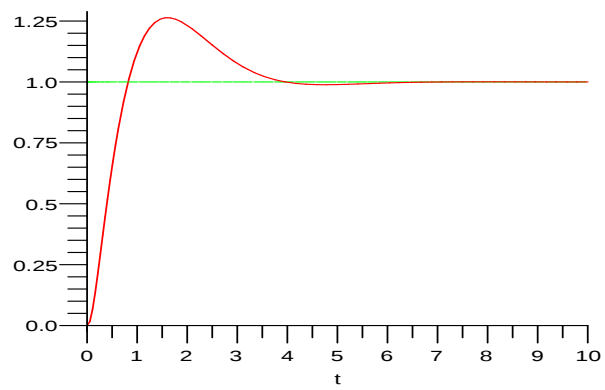


Figura 6: Respuesta a escalón sin pre-filtro

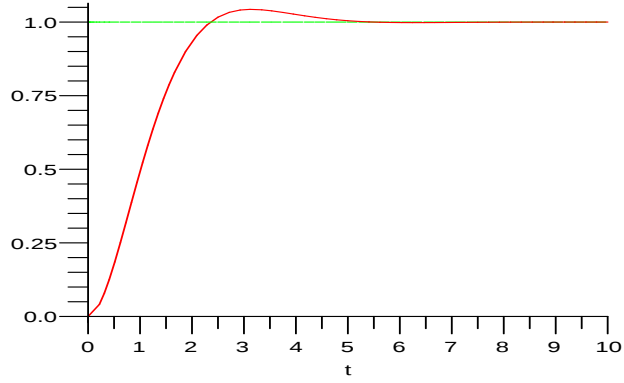


Figura 7: Respuesta a escalón con pre-filtro

Cuestión 2

... Calcular el modelo lineal con la estructura $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ en un entorno del punto operativo $g = 10$, $R = 1$, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

La planta está dada en la forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{R} \sin x_1 + u^2 \sin x_1 \cos x_1 \\ y &= x_1 \end{cases}$$

el punto operativo es: $x_1^o = \frac{\pi}{4}$, $x_2^o = 0 \Rightarrow 0 = f(x^o, u_o) \Rightarrow 0 = -\frac{g}{R} \sin x_1^o + u_o^2 \sin x_1^o \cos x_1^o \Rightarrow u_o^2 = \frac{g}{R \cos x_1^o} = 10\sqrt{2}$ Los coeficientes del sistema lineal se calculan de acuerdo con:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^o, u_o} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{R} \cos x_1^o + u_o^2 (1 - 2 \sin^2 x_1^o) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^o, u_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2u_o \sin x_1^o \cos x_1^o \end{pmatrix}$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x^o, u_o} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuestión 3

- Efectuar la representación asintótica de Bode.
Verificar la figura (8)
- Estableciendo un lazo de realimentación unitaria negativa, cual el margen de fase (MF) aproximado del arreglo ?
Aproximadamente 45° . El sistema es estable con realimentación negativa.

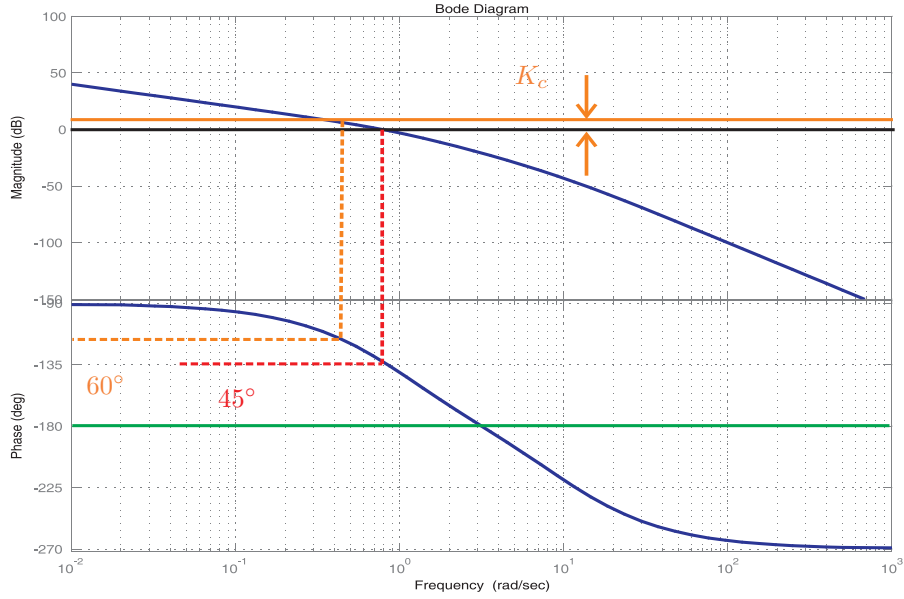


Figura 8: Diagrama de Bode

- Se desea un margen de fase de 60° . Determinar un compensador que estabilice la planta en las condiciones exigidas.
Es suficiente un compensador proporcional que sin alterar la fase, lleve el punto de cruce para la izquierda. Así se obtiene $20 \log_{10} K_c \approx -8 \text{ dB} \Rightarrow K_c \approx 10^{-8/20}$
- Si se aplica a entrada del lazo cerrado con realimentación unitaria negativa una señal $y_r(t) = \sin(t)\mathbf{1}(t)$ ¿Cual la respuesta en regimen permanente?
La función de transferencia de lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)} = \frac{10}{s(s+1)(s+10) + 10}$$

para $y_r(t) = \sin(t)\mathbf{1}(t) \Rightarrow \omega = 1$ por tanto

$$G(j\omega) = G(j) = \frac{10}{j(j+1)(j+10) + 10} = \frac{10}{9j-1} \Rightarrow \begin{cases} |G(j)| & \approx \frac{10}{9} \\ \angle G(j) & = \arctan(9) \end{cases}$$

$$y_{r.p.}(t) \approx \frac{10}{9} \sin(t + \arctan(9))$$

Cuestión 4

- Elaborar la función de transferencia $\Theta(s)/\Theta_r(s)$.

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{K(s+\alpha) \frac{K_m}{1+sT} \frac{1}{Js^2}}{1 + K(s+\alpha) \frac{K_m}{1+sT} \frac{1}{Js^2} + \frac{K_m}{1+sT} \frac{1}{Js^2} K_t s} = \frac{K_m K(s+\alpha)}{Js^2(1+sT) + K_m K(s+\alpha) + K_m K_t s}$$

- Elaborar la función de transferencia $\Theta(s)/\tau_d(s)$.

$$\frac{\Theta(s)}{\tau_d(s)} = \frac{\frac{1}{Js^2}}{1 + K(s+\alpha) \frac{K_m}{1+sT} \frac{1}{Js^2} + \frac{K_m}{1+sT} \frac{1}{Js^2} K_t s} = \frac{1+sT}{Js^2(1+sT) + K_m K(s+\alpha) + K_m K_t s}$$

- Verificar cuales valores de K estabilizan el lazo cerrado.
Expandiendo el denominador

$$d(s) = JTs^3 + Js^2 + K_m(K + K_t)s + K_m K\alpha$$

calculando el arreglo de Routh se llega a la condición

$$K(T\alpha - 1) < K_t$$

donde K, α son los parámetros del controlador.

- Calcular la expresión del error en régimen permanente para entrada en rampa unitaria en la consigna, en función de los parámetros del sistema. (Suponer $\tau_d(t) = 0$).

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(\Theta_r(s) - \Theta(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - G(s))\Theta_r(s)$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{Js^2(1+sT) + K_m K_t s}{Js^2(1+sT) + K_m K(s+\alpha) + K_m K_t s} \frac{1}{s^2} = \frac{K_t}{K\alpha}$$

- Calcular la excursión del ángulo de salida en régimen permanente para una perturbación $\tau_d(t)$ en la forma de un escalón unitario. (Suponer $\theta_r(t) = 0$).

$$y_\tau(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_\tau(s)\tau_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1+sT}{Js^2(1+sT) + K_m K(s+\alpha) + K_m K_t s} \frac{1}{s} = \frac{1}{K_m K\alpha}$$

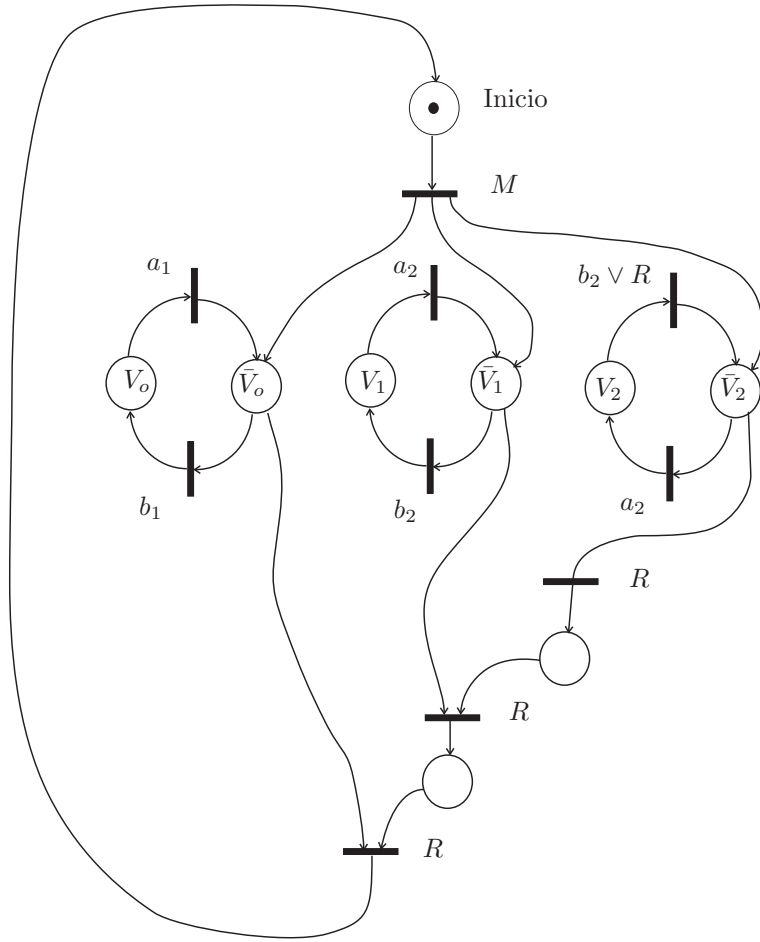


Figura 9: Red de Petri de los depósitos

Cuestión 5

Una solución posible