

SOLUCIONES DEL EXAMEN REALIZADO EN 07-09-2007

CESÁREO RAIMÚNDEZ

PROBLEMA 1

Efectuando la transformada de Laplace en las ecuaciones de la dinámica tendremos:

$$(0.1) \quad \begin{aligned} E(s) &= (R_a + sL_a)I_a(s) + E_b(s) \\ E_b(s) &= sK_m\Theta_m(s) \\ T_m(s) &= K_mI_a(s) \\ [s^2(J_m + J_L) + sB_m]\Theta_m(s) &= T_m(s) \end{aligned}$$

substituyendo $E_b(s)$, $T_m(s)$, $I_a(s)$ obtenemos

$$(0.2) \quad G_p(s) = \frac{\Theta_m(s)}{E(s)} = \frac{K_m}{(R_a + sL_a)[s^2(J_m + J_L) + sB_m] + sK_m^2}$$

Se tiene: $\Theta_m(s) = G_p(s)E(s)$. Si ahora se incorpora la relación

$$(0.3) \quad E(s) = K_p(\Theta_R(s) - \Theta_m(s))$$

resultará

$$(0.4) \quad \frac{\Theta_m(s)}{\Theta_R(s)} = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s)}$$

La estabilidad del lazo cerrado queda supeditada a la ubicación de los ceros del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado o sea de

$$(0.5) \quad 1 + K_p G_p(s) = 0$$

que es equivalente a la ecuación polinomial

$$(0.6) \quad (R_a + sL_a)[s^2(J_m + J_L) + sB_m] + sK_m^2 + K_p K_m = 0$$

este polinomio puede arreglarse como sigue:

$$(0.7) \quad (J_m + J_L)L_a s^3 + [(J_m + J_L)R_a + B_m L_a]s^2 + (B_m R_a + K_m^2)s + K_m K_p = 0$$

Efectuando el arreglo de Routh tendremos

3	$(J_m + J_L)L_a$	$(B_m R_a + K_m^2)$
2	$[(J_m + J_L)R_a + B_m L_a]$	$K_m K_p$
1	c_1	0
0	c_2	0

substituyendo los valores numéricos se llega a:

$$(0.8) \quad 0 < K_p < 11.11$$

PROBLEMA 2

De la gráfica de bode sacamos

$$G_p(s) = \frac{10}{s+1} = \frac{K_p}{s+1}$$

de las relaciones

$$\begin{aligned} SO &= e^{-\pi \tan \theta} = 0.043 \\ t_a &= \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{20}{\cos \theta} \right) = 3.34 \end{aligned}$$

sacamos

$$\alpha = 1, \theta = \frac{\pi}{4} [\text{rad}] = 45^\circ$$

y como $\beta = \alpha / \tan(\theta)$ sacamos que $\beta = 1$ y por lo tanto

$$s_d = -1 + j$$

Para el aporte de fase

$$\angle G_c(s_d) = \pm \pi + \frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

siendo negativo y teniendo que asegurar $e(\infty) = 0$ escogemos un PI con la estructura

$$G_c(s) = \text{PI}(s) = K_c \frac{s+z}{s}$$

Ahora resolveremos el problema de dos formas distintas pero equivalentes:

$$G_{lc}(s) = \frac{\text{PI}(s)G_p(s)}{1 + \text{PI}(s)G_p(s)} = \frac{s+z}{z} \frac{zK_cK_p}{s^2 + (1 + K_cK_p)s + zK_cK_p}$$

para que se cumplan las especificaciones es necesario que

$$\frac{zK_cK_p}{s^2 + (1 + K_cK_p)s + zK_cK_p} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

de donde sale:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= zK_cK_p \\ 2\alpha &= 1 + K_cK_p \end{aligned}$$

de donde se saca

$$PI(s) = 0.1 \frac{s+2}{s}, \quad G_f(s) = \frac{2}{s+2}$$

La segunda variante (figura 1) es la de ubicar el PI con el polo en el origen de coordenadas y el zero a un ángulo $\angle G_c(s_d)$ en el vértice definido por s_d , lo que sitúa z en el punto

$$z = \alpha - \beta \tan(\theta - \angle G_c(s_d))$$

El valor de K_c se obtiene utilizando la relación

$$|G_c(s_d)G_p(s_d)| = 1$$

La respuesta a escalón del sistema en lazo cerrado con el pre-filtro $G_f(s)$ se presenta en la Figura 1.

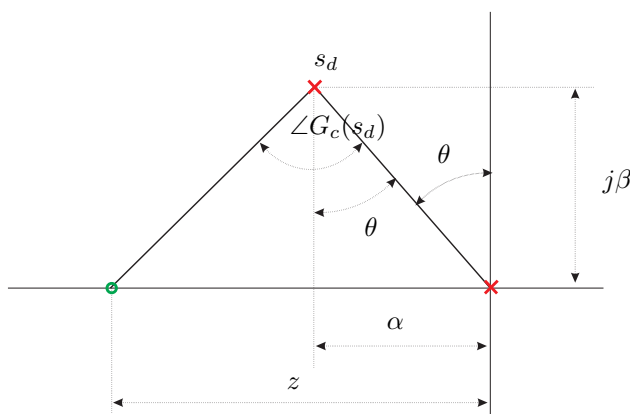


FIGURA 1. Gráfica explicativa de la fórmula

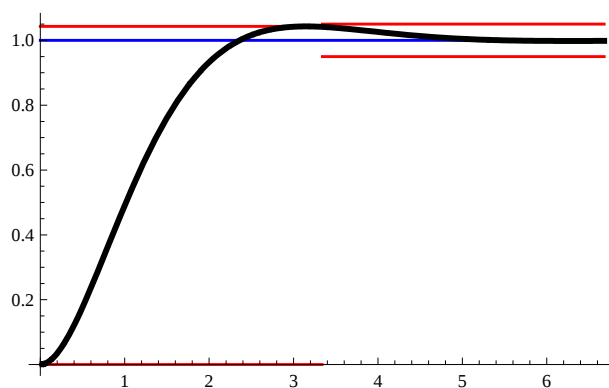


FIGURA 2. Respuesta a escalón en lazo cerrado (Problema 2)

PROBLEMA 3

Las ecuaciones de la dinámica son no lineales

$$(0.9) \quad \begin{aligned} S_1 \dot{h}_1 &= q_1 - k_2 \sqrt{h_1} - k_1 \sqrt{h_1} \\ S_2 \dot{h}_2 &= k_1 \sqrt{h_1} - k_3 \sqrt{h_2} \end{aligned}$$

Los puntos nominales de equilibrio se determinan efectuando

$$(0.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 \dot{h}_1 = 0 \\ S_2 \dot{h}_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h_1^o = \sqrt{\frac{q_1^o}{k_1 + k_2}} \\ h_2^o = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 h_1^o \end{array} \right.$$

efectuando la linealización en el punto q_1^o, h_1^o, h_2^o se obtiene

$$(0.11) \quad \begin{pmatrix} \dot{\delta} h_1 \\ \dot{\delta} h_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{k_1 + k_2}{S_1 \sqrt{h_1^o}} & 0 \\ \frac{k_1}{S_2 \sqrt{h_1^o}} & -\frac{k_3}{S_2 \sqrt{h_2^o}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta h_1 \\ \delta h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{pmatrix} \delta q_1$$

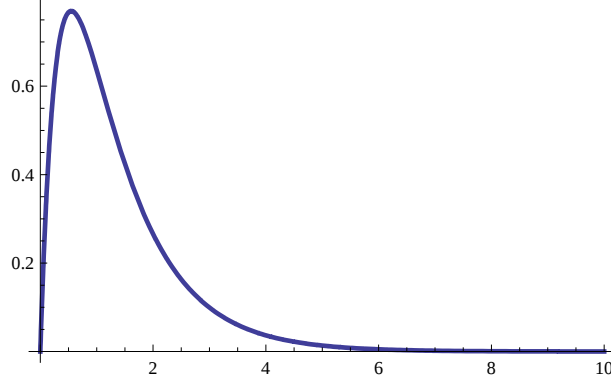


FIGURA 3. Respuesta de la planta a escalón (Problema 4)

La función de transferencia $\delta H_2(s)/\delta Q_1(s)$ queda:

$$(0.12) \quad \frac{2\sqrt{h_2^o}k_1}{(k_1 + k_2 + 2\sqrt{h_1^o}S_1s)(k_3 + 2\sqrt{h_2^o}S_2s)}$$

Poniendo valores numéricos tendremos:

$$(0.13) \quad \frac{\delta H_2(s)}{\delta Q_1(s)} = \frac{0.0875}{s^2 + 0.4725s + 0.042875}$$

PROBLEMA 4

Aplicando la ley de Newton

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t)$$

transformando Laplace ($F_B = B\dot{x}$)

$$\frac{F_B(s)}{F(s)} = \frac{sBX(s)}{F(s)} = G_p(s) = \frac{sB}{Ms^2 + Bs + K} = \frac{4s}{(s+1)(s+3)}$$

respuesta a escalón:

$$F_B(s) = G_p(s)F(s) = G_p(s)\frac{1}{s} = \frac{4s}{(s+1)(s+3)s} = \frac{a}{s+3} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s}$$

igualando los numeradores tendremos

$$(a+b+c)s^2 + (a+3b+4c)s + 3c = 4s$$

de donde sacamos

$$\begin{aligned} 3c &= 0 \\ a+3b+4c &= 4 \\ a+b+c &= 0 \end{aligned}$$

y finalmente

$$F_B(t) = 2e^{-3t}(e^{2t} - 1)\mathbf{1}(t)$$

cuyo aspecto se puede observar en la figura 2

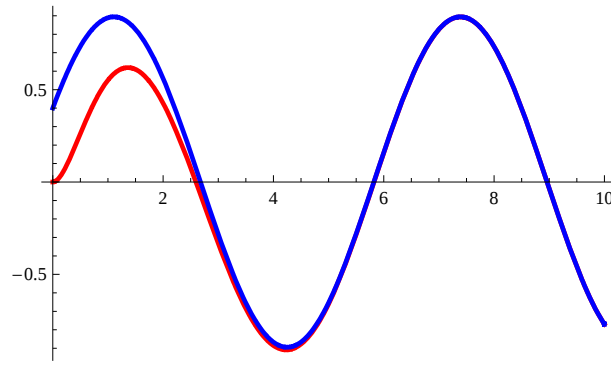


FIGURA 4. Comparación de $F_B(t)$ y $F_{B_{rp}}(t)$ para entrada sinusoidal (Problema 4)

La respuesta de régimen permanente a la entrada sinusoidal se obtiene sabiendo que $\omega = 1$ y por lo tanto

$$G_p(j) = \frac{4j}{-1 + 4j + 3} \rightarrow |G_p(j)| = 0.894427, \angle G_p(j) = 0.463648[\text{rad}]$$

y por ende

$$F_{B_{rp}}(t) = 0.894427 \sin(t + 0.463648)$$

En la figura 3 se observa la respuesta íntegra en rojo y la respuesta en régimen permanente en azul

PROBLEMA 5

E-mail address: `cesareo@uvigo.es`

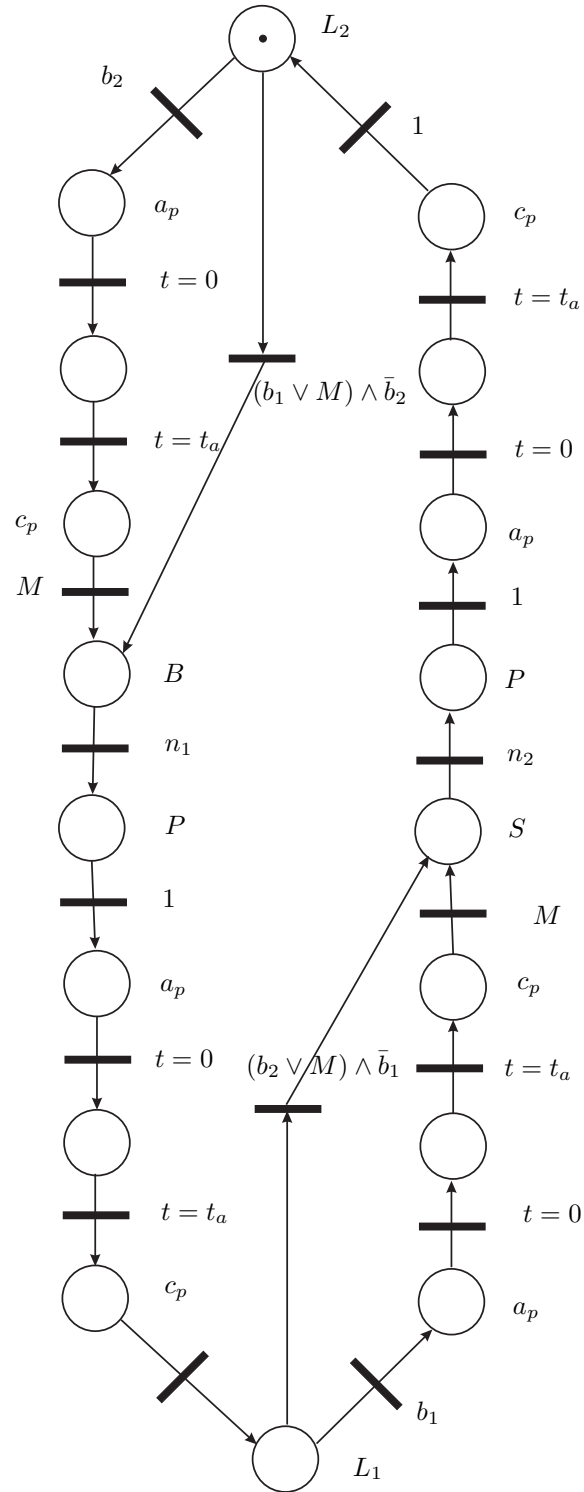


FIGURA 5. Una solución posible para la Red de Petri